

Kapitel 5

Funktionen

Seien E und F zwei nichtleere Mengen. Eine **Funktion** [*fonction*] (oder auch **Abbildung**) $f: E \rightarrow F$ ordnet jedem Element $x \in E$ genau ein Element $y \in F$ zu. Wir nennen y **Funktionswert** [*valeur*] und schreiben $y =: f(x)$. In diesem Kapitel werden E, F fast immer Teilmengen von $\mathbb{R}$ sein, aber wir werden auch Beispiele für Teilmengen von $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ betrachten. Funktionen von oder nach Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ werden wir in dieser Analysis-Vorlesung nicht behandeln; dies heben wir für die folgenden Analysis-Vorlesungen auf.

5.1 Grundbegriffe

Für eine Funktion $f: E \rightarrow F$ heisst die Menge $E =: D(f)$ **Definitionsbereich** [*domaine de définition*] von f und die Menge F **Wertebereich** [*codomaine, domaine des valeurs*] von f . Die Menge

$$f(E) := \{f(x) : x \in E\} \subset F$$

heisst **Bild** [*image*] von f und wird manchmal auch mit $\text{Im } f$ (nicht zu verwechseln mit dem Imaginärteil $\text{Im}(z)$ einer komplexen Zahl z) bezeichnet.

Zu jeder Funktion $f: E \rightarrow F$ gehört der **Graph** [*graphe*]

$$G(f) := \{(x, f(x)) : x \in E\} \subset E \times F.$$

Für $E, F \subset \mathbb{R}$ ist dies gerade die vertraute Kurve “ $y = f(x)$ ”.

Wenn $F \subset \mathbb{R}$, dann können wir die Ordnungsrelation der reellen Zahlen (siehe Kapitel 1) nutzen, um eine Ordnungsrelation für Funktionen mit gleichem Definitionsbereich zu definieren.

Definition 5.1 Seien $f, g: E \rightarrow F$ zwei Funktionen. Man schreibt $f = g$ und sagt die beiden Funktionen f und g sind gleich, wenn $f(x) = g(x)$ für alle $x \in E$ gilt. Entsprechend schreibt man $f \leq g$ (bzw. $f \geq g$), wenn $f(x) \leq g(x)$ (bzw. $f(x) \geq g(x)$) für alle $x \in E$ gilt.

Ebenso lassen sich arithmetische Operationen auf Funktionen durch die entsprechenden Operationen im Wertebereich definieren. In anderen Worten: wir können aus zwei Funktionen eine neue Funktion konstruieren. Für zwei Funktionen $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$ gelten daher die (nicht sonderlich überraschenden) Regeln:

1. Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $\alpha f + \beta g: E \rightarrow \mathbb{R}$ diejenige, die jedem $x \in E$ die Zahl $\alpha f(x) + \beta g(x)$ zuordnet.
2. Die Funktion $fg: E \rightarrow \mathbb{R}$ ist diejenige, die jedem $x \in E$ die Zahl $f(x)g(x)$ zuordnet.
3. Wenn $g(x) \neq 0$ für alle $x \in E$, dann ist die Funktion $f/g: E \rightarrow \mathbb{R}$ diejenige, die jedem $x \in E$ die Zahl $f(x)/g(x)$ zuordnet.

Man beachte, dass eine Folge reeller Zahlen ist nichts anderes als eine Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$. Es ist somit nicht verwunderlich, dass der Begriff der Monotonie sich von Folgen auf Funktionen von $E \subset \mathbb{R}$ nach $F \subset \mathbb{R}$ übertragen lässt.

Definition 5.2 Sei $f: E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $A \subset E$ nicht leer. Dann heisst f

- **monoton wachsend** [*croissante*] auf A wenn $f(x_1) \leq f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in A$ mit $x_1 < x_2$ gilt.
- **streng monoton wachsend** [*strictement croissante*] auf A wenn $f(x_1) < f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in A$ mit $x_1 < x_2$ gilt.
- **monoton fallend** [*decroissante*] auf A wenn $f(x_1) \geq f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in A$ mit $x_1 < x_2$ gilt.
- **streng monoton fallend** [*strictement décroissante*] auf A wenn $f(x_1) > f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in A$ mit $x_1 < x_2$ gilt.

5.1.1 Beschränkte Funktionen und Funktionen auf Teilmengen

Eigenschaften wie Beschränktheit, Supremum, etc., welche wir schon von den Folgen schon kennen, betrachten wir nun hier für Funktionen.

Definition 5.3 Sei $f: E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dann heisst f

- **nach oben beschränkt** [*majorée, bornée supérieurement*] wenn das Bild $f(E)$ nach oben beschränkt ist. In diesem Fall schreiben wir für die kleinste obere Schranke

$$\sup_{x \in E} f(x) := \sup\{f(x) : x \in E\}.$$

- **nach unten beschränkt** [*minorée, bornée inférieurement*] wenn das Bild $f(E)$ nach unten beschränkt ist. In diesem Fall schreiben wir für die grösste untere Schranke

$$\inf_{x \in E} f(x) := \inf\{f(x) : x \in E\}.$$

- **beschränkt** [*bornée*] wenn f nach oben und unten beschränkt ist.

Oftmals ist es von Interesse eine Funktion $f: E \rightarrow F$ nicht auf ihrem gesamten Definitionsbereich E zu untersuchen, sondern lediglich auf einer nichtleeren Teilmenge $A \subset E$. Beispielsweise kann es sein, dass die Funktion f im obigen Sinne nicht beschränkt ist, dies aber auf einer entsprechenden Teilmenge ist. Zu diesem Zweck definieren wir zunächst das Bild einer nichtleeren Teilmenge $A \subset E$ unter einer Funktion f analog zu der Definition des Bildes von f als die Menge

$$f(A) := \{f(x) : x \in A\} \subset F.$$

Jetzt können wir direkt das obige Konzept der Beschränktheit von f auf Teilmengen übertragen.

Definition 5.4 Sei $f: E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\emptyset \neq A \subset E$. Dann heisst f **auf der Menge A nach oben (bzw. unten) beschränkt**, wenn das Bild von A unter f , d.h. $f(A)$, nach oben (bzw. unten) beschränkt ist. Die kleinste obere (bzw. grösste untere) Schranke auf A bezeichnen wir mit $\sup_{x \in A} f(x) := \sup f(A)$ (bzw. $\inf_{x \in A} f(x) := \inf f(A)$). Die Funktion f ist **auf A beschränkt**, wenn f auf A nach oben und unten beschränkt ist.

Für beschränkte Funktionen gelten die folgenden nützlichen Rechenregeln.

1. Sei $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf $A \subset E$ nach oben beschränkte Funktion. Dann ist die Funktion $-f$ auf A nach unten beschränkt und es gilt

$$\sup_{x \in A} f(x) = - \inf_{x \in A} (-f(x)).$$

2. Seien $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$ zwei auf $A \subset E$ nach oben beschränkte Funktionen. Dann ist auch die Funktion $h = f + g$ auf A nach oben beschränkt und es gilt

$$\sup_{x \in A} h(x) \leq \sup_{x \in A} f(x) + \sup_{x \in A} g(x).$$

3. Sei $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf $A \subset E$ nach oben (bzw. unten) beschränkte Funktion und sei B eine nichtleere Teilmenge von A . Dann ist f auch auf B nach oben (bzw. unten) beschränkt und es gilt ausserdem

$$\sup_{x \in B} f(x) \leq \sup_{x \in A} f(x) \quad (\text{bzw.} \quad \inf_{x \in B} f(x) \geq \inf_{x \in A} f(x)).$$

Für zwei Funktionen, die auf einer Teilmenge des Definitionsbereichs identisch sind, ergibt sich unmittelbar die folgenden Definition.

Definition 5.5 Sei $\emptyset \neq A \subset E$ sowie $f: E \rightarrow F$ und $g: A \rightarrow F$. Falls $f(x) = g(x)$ für alle $x \in A$ gilt, dann nennt man f eine **Fortsetzung** [prolongement] von g auf E , bzw. g eine **Einschränkung** [restriction] von f auf A .

Ebenso kann man eine Funktion $f: E \rightarrow F$ auf Teilmengen vom Wertebereich F untersuchen. Sei dazu $B \subset F$ nicht leer. Nun kann man fragen, welche $x \in E$

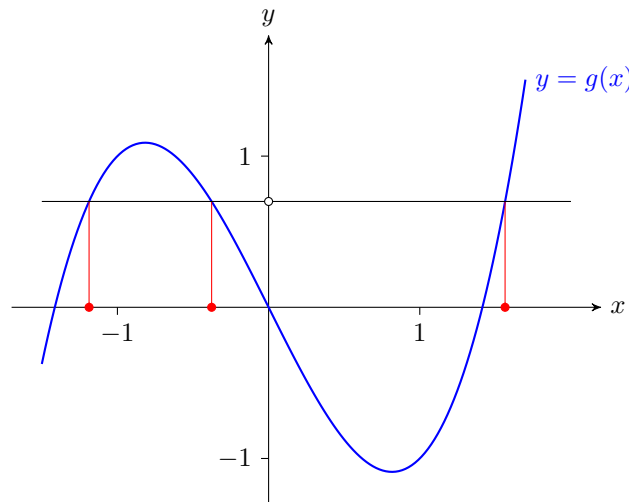


Abbildung 5.1. Graph der Funktion $g(x) = x^3 - 2x$.

einen Funktionswert $f(x) \in B$ liefern? In anderen Worten: wir möchten das **Urbild** [*image réciproque*] von B unter f bestimmen

$$f^{-1}(B) := \{x \in E : f(x) \in B\} \subset E.$$

Diese Menge wird unter anderem in den folgenden Abschnitten von Bedeutung sein.

5.2 Surjektiv, Injektiv, Bijektiv

Zu der Definition einer Funktion f gehört nicht nur die Angabe der Rechenvorschrift (z.B. $f(x) := \sin x$) sondern auch die Angabe des Definitions- und Wertebereichs. Dies ist insbesondere bei der Verwendung der folgenden Begriffe wichtig.

Surjektivität. Eine Funktion $f: E \rightarrow F$ heisst **surjektiv** [*surjectif*] wenn $F = f(E)$ gilt. In anderen Worten, f ist surjektiv, wenn die gesamte Menge F mit Funktionswerten ausgefüllt wird. Oder formaler: Zu jedem $y \in F$ gibt es *mindestens* ein $x \in E$ mit $y = f(x)$.

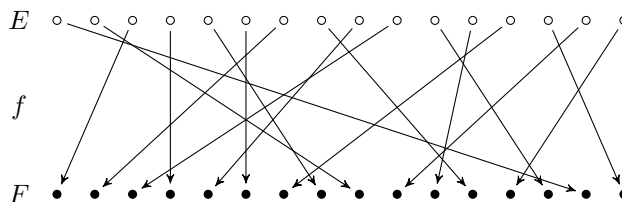
Zum Beispiel ist die Funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) := x^3 - 2x$ surjektiv, siehe Abbildung 5.1. Die Funktion $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(x) := \sin x$ hingegen ist nicht surjektiv, da $h(\mathbb{R}) = [-1, 1] \neq \mathbb{R}$. Verkleinert man aber den Wertebereich entsprechend, so wird auch $h: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ surjektiv.

Injektivität. Eine Funktion $f: E \rightarrow F$ heisst **injektiv** [*injectif*] wenn für alle x_1, x_2 mit $x_1 \neq x_2$ stets $f(x_1) \neq f(x_2)$ gilt. Oder andersherum: Aus $f(x_1) = f(x_2)$ folgt $x_1 = x_2$. Formaler: Zu jedem $y \in F$ gibt es höchstens ein $x \in E$ mit $y = f(x)$.

Am Graphen der Funktion lässt sich Injektivität leicht feststellen: Jede horizontale Linie darf den Graphen *höchstens* ein Mal schneiden. Wie sich leicht in Abbildung 5.1 feststellen lässt, ist die Funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) := x^3 - 2x$ nicht injektiv. Die Funktion $h: [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(x) := \sin x$ ist injektiv da der Sinus im angegebenen Intervall streng monoton wächst. Allgemeiner ist jede *streng* monoton wachsende oder *streng* monoton fallende Funktion injektiv.

Bijektivität. Eine Funktion $f: E \rightarrow F$ heisst **bijektiv** [*bijectif*] wenn sie sowohl surjektiv als auch injektiv ist. Formaler: Zu jedem $y \in F$ gibt es genau ein $x \in E$ mit $y = f(x)$. Am Graphen der Funktion erkennt man Bijektivität daran, dass jede horizontale Linie den Graphen *genau* ein Mal schneidet.

Bemerkung 5.6 Sind E, F endliche Mengen gleicher Kardinalität, zum Beispiel $E = F = \{1, 2, \dots, N\}$, so fallen die Begriffe Surjektivität, Injektivität und Bijektivität zusammen. Dass heisst, eine injektive Funktion $f: E \rightarrow F$ ist immer auch surjektiv, und umgedreht. Dies sieht man am Bild leicht ein:



Für eine injektive Funktion $f: E \rightarrow F$ „heiratet“ jedes Element aus E monogam ein Element aus F . Da E und F gleiche Kardinalität haben, bleibt am Ende kein Element aus F Single. Also ist f auch surjektiv.

Für $E = F = \{1, 2, \dots, N\}$ entspricht eine bijektive Funktion f gerade einer **Permutation** (oder Vertauschung) der Elemente $\{1, 2, \dots, N\}$.

5.3 Umkehrfunktion

Zu einer bijektiven Funktion $f: E \rightarrow F$ können wir eine **Umkehrfunktion** [*bijection réciproque*] (auch **inverse Funktion**) $f^{-1}: F \rightarrow E$ wie folgt definieren:

$$f^{-1}(y) := \text{dasjenige } x \in E \text{ für das } y = f(x) \text{ gilt.}$$

Zum Beispiel berechnet sich die Umkehrfunktion von $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x - 2$ durch Auflösung der Beziehung $y = 3x - 2$ als $x = \frac{1}{3}y + \frac{2}{3} = f^{-1}(y)$. Oft ist es nicht so einfach, die Formel für eine Umkehrfunktion anzugeben. Im Gegensatz dazu ist es sehr einfach, den Graph der Umkehrfunktion zu zeichnen; dazu spiegelt man einfach den Graph von f an $y = x$, siehe zum Beispiel Abbildung 5.2 für $f(x) = \frac{12x-7}{3x-1}$.

Es folgen einige weitere Beispiele von Umkehrfunktionen.

Potenzfunktion. Die Funktion

$$f: [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[, \quad f(x) = x^n$$

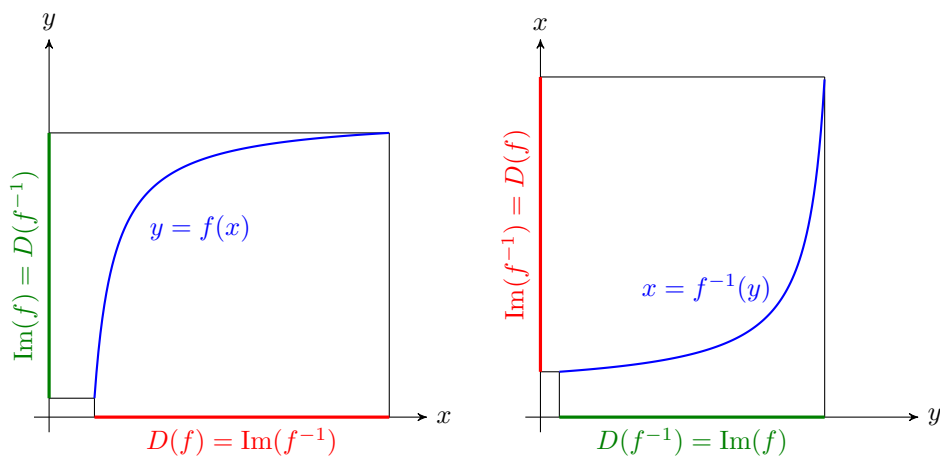


Abbildung 5.2. Funktion $f(x) = (12x - 7)/(3x - 1)$ (Bild links) und ihre Umkehrfunktion (Bild rechts).

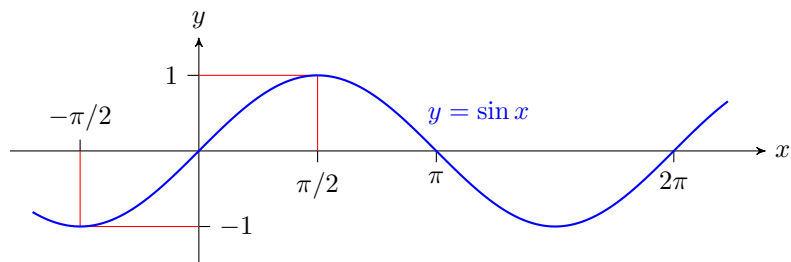
ist surjektiv. Ausserdem ist sie streng monoton wachsend und damit auch injektiv. Die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[, \quad f(x) = \sqrt[3]{x}$$

ist gerade die n -te **Wurzel** [*racine n-ième*].

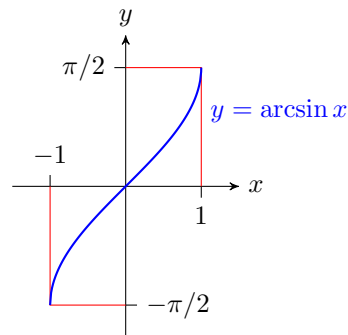
Sinus. Durch entsprechende Einschränkung des Definitions- und Wertebereich kann eigentlich jede Funktion bijektiv gemacht werden. So wird zum Beispiel der Sinus durch die folgende Einschränkung bijektiv:

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1].$$



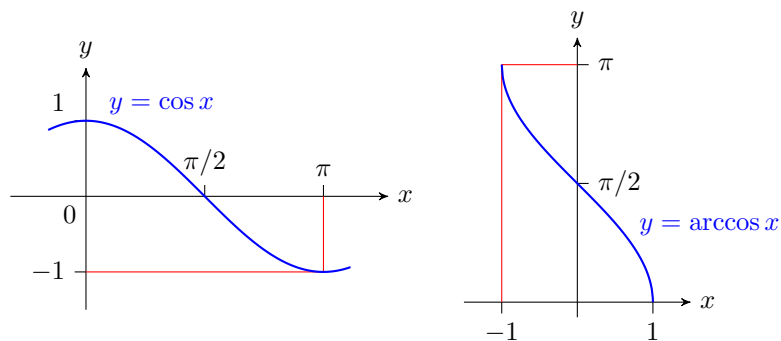
Die entsprechende Umkehrfunktion ist der Arcussinus

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$



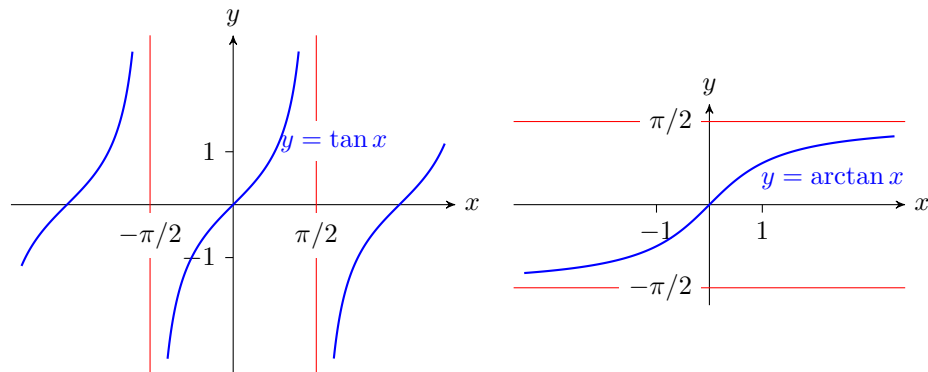
Cosinus. Die Einschränkung $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ macht den Cosinus bijektiv. Die entsprechende Umkehrfunktion ist der Arcuscosinus

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi].$$



Tangens. Die Einschränkung $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ macht den Tangens bijektiv. Die entsprechende Umkehrfunktion ist der Arcustangens

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$



Exponentialfunktion. Die Umkehrung der Exponentialfunktion haben wir bereits ausführlich in Abschnitt 4.5 behandelt. Insbesondere ist $f: \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$ mit $f(x) = e^x$ bijektiv. Die entsprechende Umkehrfunktion ist der (reelle) Logarithmus $\log:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$.

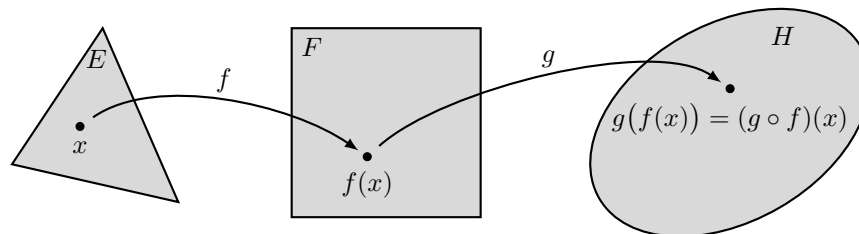
5.4 Komposition von Funktionen

Wir haben bereits gesehen, dass man Funktionen addieren, multiplizieren und dividieren kann indem man einfach die entsprechenden Operationen auf die Funktionswerte anwendet. Interessanter ist die Komposition (auch: Verknüpfung, Nacheinanderausführung) zweier Funktionen.

Definition 5.7 Seien E, F, G, H nichtleere Mengen und $f: E \rightarrow F, g: F \rightarrow H$ zwei Funktionen mit $f(E) \subset G$. Dann heisst die Funktion

$$g \circ f: E \rightarrow H, \quad \text{mit} \quad (g \circ f)(x) := g(f(x)),$$

Komposition [composition] von f und g .



Bei der Verknüpfung muss man auf die Reihenfolge aufpassen. So sind zum Beispiel für $f(x) = e^x$ und $g(x) = \cos x$ die beiden Funktionen $(g \circ f)(x) = \cos(e^x)$ und $(f \circ g)(x) = e^{\cos x}$ sehr unterschiedlich.

Die Funktion $I_E: E \rightarrow E$ mit $I_E(x) = x$ heisst **Identität** [application identité] (auch: identische Abbildung) auf E . Mit ihr ergeben sich die (nicht sehr tief sinnigen) Beziehungen

$$f^{-1} \circ f = I_E, \quad f \circ f^{-1} = I_E$$

für jede bijektive Funktion $f: E \rightarrow E$.

5.5 Grenzwert

In diesem Abschnitt behandeln wir den Begriff des Grenzwerts einer Funktion, der uns letztendlich auf den Begriff der Stetigkeit führen wird. Um dieses Konzept an einem Punkt sinnvoll zu definieren müssen wir sicherstellen, dass die Funktion in der

Umgebung eines Punktes (aber nicht notwendigerweise im Punkt selbst) definiert ist.

Definition 5.8 Betrachte eine Funktion $f: E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann ist f **in der Umgebung von x_0 definiert** [*définie au voisinage*], wenn ein $\alpha > 0$ existiert, so dass

$$]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subset E \cup \{x_0\} .$$

Anhand einiger Beispiele sollen die Subtilitäten von Definition 5.8 aufgezeigt werden:

- Die Funktion $\log:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ist nicht in der Umgebung von 0 definiert.
- Sei $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $f_1(x) = \frac{\sin x}{x}$, $f_2(x) = 1/x$ zwei Funktionen $f_1, f_2: E \rightarrow \mathbb{R}$. Beide Funktionen sind in der Umgebung von 0 definiert! Das Verhalten einer Funktion exakt an der Stelle x_0 ist für die Definition nicht entscheidend.
- Die Funktion $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ ist nie in der Umgebung irgendeines $x_0 \in \mathbb{R}$ definiert!

Wir betrachten eine Funktion $f: E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und einen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$. Sei nun $a_0, a_1, a_2, \dots \in E$ eine Folge, die gegen x_0 konvergiert, also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0 .$$

Die spannende Frage ist jetzt, wie sich die entsprechende Folge der Funktionswerte

$$f(a_0), f(a_1), f(a_2), \dots$$

verhält. Konvergiert diese Folge und wenn ja, konvergiert sie immer gegen den gleichen Grenzwert (unabhängig von der konkreten Wahl der a_n)?

Definition 5.9 Sei die Funktion $f: E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in der Umgebung von $x_0 \in \mathbb{R}$ definiert. Wir sagen, f **hat den Grenzwert** $\ell \in \mathbb{R}$ [f admet une limite ℓ] in x_0 , wenn für jede Folge (a_n) mit $a_n \in E \setminus \{x_0\}$ und $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \ell .$$

Der Grenzwert ℓ einer Funktion muss also unabhängig von der gewählten Folge sein. Wir schreiben einfach

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell .$$

Es gibt verschiedene alternative Charakterisierungen von Definition 5.9, wie zum Beispiel die Folgende.

Theorem 5.10 Sei die Funktion $f: E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in der Umgebung von $x_0 \in \mathbb{R}$ definiert. Dann hat f den Grenzwert $\ell \in \mathbb{R}$ in x_0 genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass gilt:

$$\text{Wenn } x \in E \text{ und } 0 < |x - x_0| \leq \delta, \text{ dann ist } |f(x) - \ell| \leq \varepsilon. \quad (5.1)$$

Beweis. “ $\Leftarrow$ ”: Wir nehmen an, dass (5.1) erfüllt ist. Sei (a_n) eine beliebige Folge mit $a_n \in E \setminus \{x_0\}$ und $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Wegen unserer Annahme gibt es $\delta > 0$, so dass (5.1) erfüllt ist. Da die Folge (a_n) gegen x_0 konvergiert, gilt $|a_n - x_0| \leq \delta$ für alle $n \geq N$ mit einem (genügend grossem) $N \in \mathbb{N}$. Aus (5.1) folgt $|f(a_n) - \ell| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Da $\varepsilon > 0$ aber beliebig (klein) ist, folgt daraus $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \ell$. Also hat f den Grenzwert ℓ in x_0 .

“ $\Rightarrow$ ”: Der Beweis erfolgt per Widerspruch. Zunächst nehmen wir an, dass f den Grenzwert ℓ in x_0 hat. Wir nehmen aber auch an – im Widerspruch zur Aussage des Theorems – dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, für das es *kein* $\delta > 0$ gibt, so dass (5.1) erfüllt ist. Insbesondere gibt es also für jedes $\delta = \frac{1}{n}$ mit $n = 1, 2, \dots$ ein Element $a_n \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap E$ mit $a_n \neq x_0$, so dass $|f(a_n) - \ell| > \varepsilon$. Das heisst: obwohl $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$, konvergiert $f(a_n)$ nicht gegen ℓ . Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme, dass f den Grenzwert ℓ in x_0 hat. $\square$

5.5.1 Kriterien und Rechnen mit Grenzwerten

Da der Grenzwert einer Funktion f im Punkt x_0 durch den Grenzwert von Folgen definiert ist, können die bekannten Eigenschaften für Folgen (siehe Kapitel 2) direkt auf Grenzwerte von Funktionen übertragen werden. Wir werden uns deshalb bei der Diskussion der Eigenschaften für Grenzwerte kurz fassen.

Eindeutigkeit. Der Grenzwert ist eindeutig. Sind ℓ_1 und ℓ_2 Grenzwerte einer Funktion f im Punkt x_0 so gilt $\ell_1 = \ell_2$.

Algebraische Relationen. Seien $f, g: E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_2.$$

Dann:

1. existiert der Grenzwert von αf für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$: $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha f(x) = \alpha \ell_1$;
2. existiert der Grenzwert von $|f|$: $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |\ell_1|$;
3. existiert der Grenzwert von $f + g$: $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \ell_1 + \ell_2$;
4. existiert der Grenzwert von $f \cdot g$: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \ell_1 \ell_2$;
5. wenn zusätzlich $\ell_2 \neq 0$, dann existiert der Grenzwert von f/g :
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)/g(x) = \ell_1/\ell_2$;
6. wenn es zusätzlich ein $\alpha > 0$ gibt so dass $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in E$ mit $0 < |x - x_0| \leq \alpha$, dann folgt $\ell_1 \geq \ell_2$;

7. wenn es zusätzlich ein $\alpha > 0$ gibt so dass $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in E$ mit $0 < |x - x_0| \leq \alpha$, dann folgt $\ell_1 \leq \ell_2$.

Man beachte bei den Punkten 6 und 7, dass sich strikte Ungleichungen im allgemeinen *nicht* auf den Grenzwert übertragen. Zum Beispiel ist $f(x) = x^4$ strikt kleiner als $g(x) = x^2$ in einer Umgebung von 0 (ohne 0 selbst), die Grenzwerte beider Funktionen in $x_0 = 0$ sind aber identisch 0.

Ebenso wie die algebraischen Operationen lassen sich einige Konvergenzkriterien von Folgen auf Funktionen übertragen.

Ist eine Funktion f in einer Umgebung von x_0 definiert und besitzt einen Grenzwert in x_0 , dann ist sie notwendigerweise in dieser Umgebung beschränkt. Sollten Funktionen also bei x_0 “explodieren”, also unbeschränkt wachsen/fallen (wie zum Beispiel $1/x^2$ bei $x_0 = -0$), dann kann es keinen Grenzwert geben.

Theorem 5.11 (Kriterium der zwei Polizisten für Funktionen) Gegeben seien $f, g, h : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit den folgenden zwei Eigenschaften:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \ell$;
2. es existiert $\alpha > 0$ so dass $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ für alle $x \in E$ mit $0 < |x - x_0| \leq \alpha$.

Dann gilt $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$.

Beweis. Sei (a_n) eine Folge mit $a_n \in E \setminus \{x_0\}$ und $a_n \rightarrow x_0$. Dann gibt es N so dass $0 < |x_n - x_0| \leq \alpha$ für alle $n \geq N$. Betrachte die drei Folgen $(f_n), (g_n), (h_n)$ definiert durch

$$f_n = f(a_n), \quad g_n = g(a_n), \quad h_n = h(a_n).$$

Alle Forderungen des Theorems der zwei Polizisten für Folgen (Theorem 2.7) sind erfüllt, insbesondere gilt $f_n \leq g_n \leq h_n$ für alle $n \geq N$. Anwendung des Theorems ergibt $g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$ und damit $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$. $\square$

Beispiel 5.12 Gegeben sei die Funktion $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ mit $E :=]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ und

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{wenn } x \neq 0, \\ 2, & \text{wenn } x = 0. \end{cases}$$

Wir möchten nun den Grenzwert von f in 0 bestimmen. Offensichtlich ist die Funktion f in der Umgebung von 0 definiert. Weiterhin gilt

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1, \quad \text{für alle } x \in E \setminus \{0\} =]-\frac{\pi}{2}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{2}[.$$

Wenn wir also zeigen können, dass $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, dann folgt aus dem Kriterium der zwei Polizisten unmittelbar $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$. Der Grenzwert der Cosinusfunktion folgt in der Tat sofort aus der folgende Beobachtung, welche sich aus den

Eigenschaften von Cosinus und Sinus (vgl. Theorem 4.5) ergibt:

$$|\cos x - 1| = \left| \cos(x/2)^2 - \sin(x/2)^2 - 1 \right| = \left| -2\sin(x/2)^2 \right| \leq \frac{x^2}{2}.$$

◇

5.5.2 Unendliches

Die bisherige Definition des Grenzwertes reicht noch nicht aus, um das Verhalten einer Funktion für unbeschränkte Folgen zu untersuchen. In anderen Worten: wir können noch nichts über $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ oder $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ einer Funktion aussagen. Dazu müssen wir die bisherigen Definitionen entsprechend erweitern.

Definition 5.13 Eine Funktion $f: E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist **in der Umgebung von $+\infty$ (bzw. $-\infty$) definiert**, wenn ein Zahl $a \in \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$]a, +\infty[\subset E \quad (\text{bzw. }]-\infty, a[\subset E).$$

Nun können wir diese Grenzwerte angehen.

Definition 5.14 Sei die Funktion $f: E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in der Umgebung von $+\infty$ (bzw. $-\infty$) definiert. Wir sagen, f **hat den Grenzwert $\ell \in \mathbb{R}$ für x gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$)**, wenn für jede Folge (a_n) mit $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ (bzw. $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$) gilt: $f(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$. In diesem Fall schreiben wir $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ (bzw. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$).

Äquivalent zu Definition 5.14: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass gilt:

$$\text{Wenn } x \in E \text{ und } x \geq \alpha \text{ (bzw. } x \leq \alpha), \text{ dann ist } |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Beispiel 5.15 Betrachte die Funktionen $f_1, f_2: E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $E = [0, \infty[$ und $f_1(x) = \frac{1}{x+1}$ sowie $f_2(x) = e^{-x}$. Beide Funktionen sind in der Umgebung von ∞ definiert. Beide haben auch den selben Grenzwert $\ell = 0$, denn zu $\varepsilon > 0$ beliebig ist obige Bedingung für f_1 mit $\alpha_1 \geq 1/\varepsilon - 1$ und für f_2 mit $\alpha_2 \geq \log(1/\varepsilon)$ jeweils erfüllt.

Wie bei den Reihen, so zeichnen sich auch bei Funktionen diese aus, für welche die Folgen der Funktionswerte betragsmäßig gegen unendlich gehen.

Definition 5.16 Gegeben sei eine Funktion $f: E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt:

- Falls f in der Umgebung von $x_0 \in \mathbb{R}$ definiert ist, dann sagt man f **geht gegen [tend vers] $+\infty$ (bzw. $-\infty$) in x_0** , wenn für jedes $A > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ existiert, so dass gilt:

$$\text{Wenn } x \in E \text{ und } 0 < |x - x_0| \leq \delta, \text{ dann ist } f(x) \geq A \text{ (bzw. } f(x) \leq -A).$$

In diesem Fall schreibt man $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ (bzw. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$).

- Falls f in der Umgebung von $+\infty$ definiert ist, dann sagt man f **geht gegen** $+\infty$ (**bzw.** $-\infty$) **für** x **gegen** $+\infty$, falls für jedes $A > 0$ eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ existiert, so dass gilt:

Wenn $x \in E$ und $x \geq \alpha$, dann ist $f(x) \geq A$ (bzw. $f(x) \leq -A$).

In diesem Fall schreibt man $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (bzw. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$).

- Falls f in der Umgebung von $-\infty$ definiert ist, dann sagt man f **geht gegen** $+\infty$ (**bzw.** $-\infty$) **für** x **gegen** $-\infty$, falls für jedes $A > 0$ eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ existiert, so dass gilt:

Wenn $x \in E$ und $x \leq \alpha$, dann ist $f(x) \geq A$ (bzw. $f(x) \leq -A$).

In diesem Fall schreibt man $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ (bzw. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$).

Bemerkung 5.17 Auch für Funktionen die gegen unendlich gehen können die Rechenregeln der gegen unendlich gehenden Folgen (Abschnitt 2.6.1) auf Funktionen übertragen werden.

5.6 Stetigkeit

Mit Hilfe des Grenzwerts sind wir nun in einer bequemen Lage, den Begriff der Stetigkeit zu definieren.

Definition 5.18 Sei $f: E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in E$. Dann ist die Funktion f **stetig** [continue] im Punkt x_0 , wenn ihr Grenzwert in x_0 existiert und

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) .$$

Aus Definition 5.9 und Theorem 5.10 lassen sich sofort zwei äquivalente Charakterisierungen für Stetigkeit angeben:

- **Folgencharakterisierung:** f ist stetig in x_0 genau dann, wenn für jede Folge (a_n) mit $a_n \in E$ und $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$ die Beziehung $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x_0)$ erfüllt ist.
- **ε, δ -Charakterisierung:** f ist stetig in x_0 genau dann, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein (von ε und x_0 abhängiges) $\delta > 0$ gibt, so dass $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ für alle $x \in E$ mit $|x - x_0| \leq \delta$ erfüllt ist.

Die intuitivste Charakterisierung von Stetigkeit ergibt sich aus dem Graph: f ist stetig in x_0 genau dann, wenn man den Graph von f durch x_0 durchzeichnen kann (ohne mit dem Stift abzusetzen). Eine Funktion heisst **unstetig** [discontinue] in $x_0 \in E$ wenn sie nicht stetig in x_0 ist. Bei Funktionen, die explizit über Formeln

angegeben werden erhält man Unstetigkeiten meist bei Fallunterscheidungen oder wenn die Funktion an einem Punkt nicht definiert ist. Wenn eine Funktion $f: E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in allen Punkten $x_0 \in A \subset E$ stetig ist, dann nennt man f **stetig auf A** .

Einige Beispiele:

- Die Signumsfunktion (siehe Abschnitt 1.3) ist nicht stetig in 0, aber sonst überall stetig.
- In Bemerkung 2.4 haben wir bereits (ohne es zu wissen), die Stetigkeit der Betragsfunktion $x \mapsto |x|$ auf ganz $\mathbb{R}$ und der k -ten Wurzelfunktion $x \mapsto \sqrt[k]{x}$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, auf $\mathbb{R}_+$ jeweils mit Hilfe der Folgencharakterisierung nachgewiesen.
- Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ ist in $x_0 = -1$ stetig, wie man beispielsweise mit der ε, δ -Charakterisierung nachweisen kann. Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir müssen nun zeigen, dass es ein $\delta > 0$ derart gibt, so dass $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| \leq \delta$. Hier kann man $\delta := \varepsilon$ wählen, denn dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| = |x + 1| \leq \delta$

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{x-1}{x^2+1} + 1 \right| = \frac{|x|}{x^2+1} |x+1| \leq |x+1| \leq \delta = \varepsilon.$$

- Nun untersuchen wir die durch

$$f_1(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0, \end{cases} \quad \text{und} \quad f_2(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

definierten Funktion $f_1, f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jeweils auf Stetigkeit in $x_0 = 0$ mittels der Folgencharakterisierung.

1. Die Funktion f_1 ist nicht stetig in $x_0 = 0$, denn die Folge (a_n) mit $a_n := \frac{2}{(4n+1)\pi}$ erfüllt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 = x_0$, aber $\lim_{n \rightarrow \infty} f_1(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{4n+1}{2}\pi\right) = 1 \neq f_1(0) = 0$.
2. Die Funktion f_2 ist hingegen stetig in $x_0 = 0$. Um das zu sehen, sei (a_n) eine beliebige Folge mit $a_n \neq 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 = x_0$. Dann gilt $|f_2(a_n)| = |a_n| \left| \sin\left(\frac{1}{a_n}\right) \right| \leq |a_n|$, was $\lim_{n \rightarrow \infty} f_2(a_n) = f_2(x_0) = 0$ zeigt.

Wenn nun zwei Funktionen $f, g: E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in E$ sind, dann sind auch die Funktionen $f + g$, $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ (falls $g(x_0) \neq 0$) stetig in x_0 , wie sofort aus den Rechenregeln für Grenzwerte (siehe Abschnitt 5.5.1) folgt. Gleiches gilt auch für die Komposition von Funktionen.

Theorem 5.19 *Gegeben seien zwei Funktionen $f: E \rightarrow F$ und $g: G \rightarrow H$ mit $f(E) \subset G$. Ist f stetig in $x_0 \in E$ und g stetig in $f(x_0)$, dann ist die Funktion $g \circ f: E \rightarrow H$ stetig in $x_0 \in E$.*

Beweis. Sei (a_n) mit $a_n \in E$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$. Da f stetig in x_0 ist, gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x_0)$. Weil g stetig in $f(x_0)$ ist, gilt dann weiter $\lim_{n \rightarrow \infty} g(f(a_n)) = g(f(x_0))$, was zu zeigen war. $\square$

Um beispielsweise eine Division durch Null auszuschliessen, werden einzelne Punkte oft aus dem Definitionsbereich einer Funktion ausgeschlossen. In machen Fällen kann man eine solche Lücke jedoch „reparieren“.

Definition 5.20 Sei $f: E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und c eine reelle Zahl mit $c \notin E$ für welche die Funktion f einen Grenzwert besitzt. Die durch

$$\hat{f}_c(x) = \begin{cases} f(x), & \text{wenn } x \in E, \\ \lim_{y \rightarrow c} f(y), & \text{wenn } x = c, \end{cases}$$

definierte Funktion $\hat{f}_c: E \cup \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$ heisst dann die **stetige Fortsetzung** [prolongement par continuité] der Funktion f im Punkt c .

Aus der Eindeutigkeit des Grenzwertes folgt, dass eine solche Fortsetzung, falls sie existiert, eindeutig sein muss. Ausserdem ist die Funktion $\hat{f}_c$ per Definition stetig in $x_0 = c$.

Beispiel 5.21 Wir betrachten die durch $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ definierte Funktion $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ mit $E = \mathbb{R}^* \equiv \mathbb{R} \setminus \{0\}$. In Beispiel 5.12 habe wir gesehen, dass $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ist. Somit ist die durch

$$\hat{f}_0(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{wenn } x \neq 0, \\ 1, & \text{wenn } x = 0, \end{cases}$$

gegebene Funktion $\hat{f}_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die stetige Fortsetzung von f im Punkt 0. Man beachte, dass die Funktion $\hat{f}_0$ somit stetig auf ganz $\mathbb{R}$ ist.

5.6.1 Einseitige Grenzwerte und Stetigkeit

Zur Untersuchung von Unstetigkeiten einer Funktion (z.B. Sprünge) im Punkt x_0 ist es hilfreich (einseitige) Grenzwerte zu definieren, bei denen nur Folgenglieder betrachtet werden, die ausschliesslich links bzw. rechts von x_0 liegen. Zur Vorbereitung müssen wir zuerst den Begriff der Umgebung entsprechend anpassen.

Definition 5.22 Eine Funktion $f: E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heisst **rechts (bzw. links) von x_0 definiert** [définie à droite (resp. à gauche) de x_0], wenn eine Zahl $\alpha > 0$ existiert, so dass $]x_0, x_0 + \alpha[\subset E$ (bzw. $]x_0 - \alpha, x_0[\subset E$).

Ist eine Funktion f sowohl links als auch rechts von x_0 definiert, so ist sie auch in der Umgebung von x_0 definiert (vgl. Definition 5.8) und umgekehrt. In diesem Sinne ist obige Definition sehr natürlich und erlaubt uns jetzt einseitige Grenzwerte zu definieren.

Definition 5.23 Sei $f: E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- Falls f rechts von x_0 definiert ist, dann hat f **den rechtsseitigen Grenzwert** ℓ [limites à droite] in x_0 wenn für jede Folge (a_n) mit $a_n \in E$, $a_n > x_0$ und $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \ell$. In diesem Fall schreiben wir

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell.$$

- Falls f links von x_0 definiert ist, dann hat f den **linksseitigen Grenzwert** ℓ [limites à gauche] in x_0 wenn für jede Folge (a_n) mit $a_n \in E$, $a_n < x_0$ und $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \ell$. In diesem Fall schreiben wir

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell.$$

Mit den oben eingeführten Begriffen nennen wir eine in x_0 definierte Funktion **rechtsseitig stetig** bzw. **linksseitig stetig** wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

gelten.

Die folgende Aussage leuchtet dann direkt ein und folgt aus der ε, δ -Charakterisierung von Stetigkeit.

Theorem 5.24 Sei $f: E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in E$. Dann ist f stetig in x_0 genau dann, wenn f links- und rechtsseitig stetig in x_0 ist.

5.6.2 Stetigkeit auf Mengen und Intervallen

Ist f auf einer offenen Menge E definiert (insbesondere auf einem offenen Intervall), dann ist es in der Umgebung von jedem Punkt $x_0 \in E$ definiert und die folgende Definition macht Sinn.

Definition 5.25 Sei $E \neq \emptyset$ offen und $f: E \rightarrow F$. Dann heisst f **stetig auf E** [continue sur E], wenn f in jedem Punkt $x_0 \in E$ stetig ist. Die Menge aller auf E stetigen Funktionen von E nach F wird mit $C(E, F)$ bezeichnet.

Mit Hilfe der Definition der linksseitigen/rechtsseitigen Stetigkeit können wir auch die Stetigkeit von Funktionen auf *abgeschlossenen* Intervallen genauer betrachten.

Definition 5.26 Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow F$ heisst **stetig auf $[a, b]$** [continue sur $[a, b]$], wenn f in jedem Punkt $x_0 \in]a, b[$ stetig ist, rechtsseitig stetig in a ist und linksseitig stetig in b ist. Die Menge aller auf $[a, b]$ stetigen Funktionen von $[a, b]$ nach F wird mit $C([a, b], F)$ bezeichnet.

Meist ist $F = \mathbb{R}$ (zum Beispiel wenn man das Bild der Funktion nicht genauer beschreiben will), dann schreibt man $C(E, F)$ bzw. $C([a, b], F)$ oftmals einfach nur als $C(E)$ bzw. $C([a, b])$. Wenn der Definitionsbereich klar ist, dann sagt man oft einfach nur „ f ist stetig“ anstelle von „ f ist stetig auf E “.

5.6.3 Gleichmässige Stetigkeit[★]

Bei einem (halb-) offenen Intervall kann es passieren, dass eine Funktion auf dem Intervall zwar stetig ist, sich aber in der Nähe eines offenen Randes immer „wilder“ verhält. Dies ist zum Beispiel bei den Funktionen $1/x$ oder $\sin(1/x)$ auf dem Intervall $]0, 1[$ in der Nähe von 0 der Fall. Die folgende Definition schliesst solche Phänomene aus.

Definition 5.27 Sei I ein Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Dann heisst f **gleichmässig stetig** [*uniformément continue*] auf I , wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ für alle $x, y \in I$ mit $|x - y| \leq \delta$ erfüllt ist.

Was ist der Unterschied zwischen den Definitionen 5.25 (bzw. 5.26) und 5.27, also zwischen Stetigkeit und gleichmässiger Stetigkeit auf einem Intervall? Im ersten Fall gibt es für jedes $x_0 \in I$ und $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ für alle $x \in I$ mit $|x - x_0| \leq \delta$. Der wichtige Punkt ist, dass δ von x_0 abhängen kann. Insbesondere darf δ beliebig klein werden. Dies ist bei Funktionen wie $1/x$ und $\sin(1/x)$ auf $I =]0, 1[$ der Fall: δ muss immer kleiner gewählt werden je näher $x_0 > 0$ an 0 heran kommt. Die Definition von gleichmässiger Stetigkeit schliesst diese Situation aus. Hier muss es ein $\delta > 0$ geben, das für alle $x_0 \in I$ funktioniert.

Bemerkung 5.28 Wenn $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ nicht gleichmässig stetig ist, dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass man für jedes $\delta > 0$ zwei reelle Zahlen $x, y \in I$ finden kann, für die $|x - y| \leq \delta$ und $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$ gelten.

Äquivalent dazu kann man (durch immer kleinere Wahl von $\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$) zwei Folgen $(x_n), (y_n)$ konstruieren, so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0, \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

gilt. ◇

Dass eine Funktion stetig aber nicht gleichmässig stetig ist, kann auf abgeschlossenen Intervallen nicht passieren.

Theorem 5.29 Eine auf einem abgeschlossenen Intervall $I = [a, b]$, $a < b$, stetige Funktion ist gleichmässig stetig.

Beweis. Der Beweis erfolgt per Widerspruch. Wir nehmen an, dass es eine Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, die auf $I = [a, b]$ stetig aber nicht gleichmässig stetig ist. Wegen Bemerkung 5.28 gibt es $\varepsilon > 0$ und Folgen $(x_n), (y_n)$ so dass

$$x_n, y_n \in [a, b], \quad |x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}, \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Da x_n beschränkt ist, gibt es nach dem Satz von Bolzano–Weierstrass (Theorem 2.12) eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) . Sei $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$. Da I abgeschlossen ist, folgt $x \in I$. Ausserdem gilt

$$|y_{n_k} - x| \leq |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| \leq \frac{1}{n_k} + |x_{n_k} - x| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Also gilt auch $x = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k}$. Da f stetig in x ist, folgt daraus

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| = 0.$$

Dies steht aber im Widerspruch zu $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

5.7 Wichtige Eigenschaften stetiger Funktionen

Man kann sich leicht am Graph einer stetigen Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall überzeugen, dass die Bildmenge wieder ein abgeschlossenes Intervall ist.

Theorem 5.30 (Hauptsatz über stetige Funktionen) Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es $m, M \in \mathbb{R}$, so dass

$$f([a, b]) = [m, M].$$

Wir sagen, dass eine Funktion $f: E \rightarrow F$ das **Maximum** M besitzt wenn M das Maximum der Menge $f(E)$ ist, d.h.,

$$f(x) \leq M \quad \forall x \in E, \quad M \in f(E).$$

Analog besitzt f das **Minimum** m besitzt wenn m das Minimum der Menge $f(E)$ ist, d.h.,

$$f(x) \geq m \quad \forall x \in E, \quad m \in f(E).$$

Wir schreiben $M = \max_{x \in E} f(x)$ und $m = \min_{x \in E} f(x)$. Gilt $f(x_m) = m$ bzw. $f(x_M) = M$, so sagen wir, dass f sein Minimum bzw. Maximum in x_m bzw. x_M annimmt.

Aus Theorem 5.30 ergibt die folgenden wichtigen Folgerungen.

Korollar 5.31 Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f sein Minimum m und sein Maximum M in $[a, b]$ an. Das heisst, es gibt $x_m, x_M \in [a, b]$ so dass $f(x_m) = m$ und $f(x_M) = M$ und für alle $x \in [a, b]$ gilt

$$m \leq f(x) \leq M.$$

Theorem 5.32 (Zwischenwertsatz [Théorème de la valeur intermédiaire]) Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und seien $x_1, x_2 \in [a, b]$. Sei y eine reelle Zahl **zwischen** $f(x_1)$ und $f(x_2)$. Dann gibt es $x \in [a, b]$ mit $y = f(x)$.

Beispiel 5.33 Wir stellen für das Polynom $P(x) = x^5 + x^4 + x^3 - 1$ die Frage, ob die Gleichung

$$P(x) = x \tag{5.2}$$

eine positive reelle Lösung hat?

Wir betrachten dazu $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = P(x) - x = x^5 + x^4 + x^3 - 1 - x.$$

Die Funktion f ist stetig und ausserdem gilt $f(0) = -1 < 0$ sowie $f(1) = 1 > 0$. Wenn wir nun den Definitionsbereich von f auf das Intervall $[0, 1]$ einschränken, so gibt es nach dem Zwischenwertsatz einen Punkt $x_0 \in [0, 1]$ so dass $f(x_0) = 0$, oder $P(x_0) = x_0$. $\diamond$

Das folgende Theorem verallgemeinert die Beobachtung von Beispiel 5.33.

Theorem 5.34 (Fixpunktsatz von Banach[★]) Sei $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ eine Funktion. Eine Lösung der Gleichung

$$f(x) = x$$

heißt ein **Fixpunkt** [point fixe] von f . Wenn f stetig ist, dann hat f einen Fixpunkt.

Beweis. Setze $g(x) = f(x) - x$. Dann ist g ebenfalls stetig auf $[a, b]$. Also gibt es nach Theorem 5.30 reelle Zahlen $m, M \in \mathbb{R}$ so dass

$$g([a, b]) = [m, M].$$

Aus der Beziehung $f(a), f(b) \in [a, b]$ folgt

$$m \leq g(b) = f(b) - b \leq 0 \quad \text{und} \quad M \geq g(a) = f(a) - a \geq 0.$$

Da $m \leq 0$ und $M \geq 0$ im Intervall von der Funktion g angenommen werden, gibt es dank des Zwischenwertsatzes ein x_0 mit $g(x_0) = 0$. Also folgt $f(x_0) = x_0$. $\square$

Theorem 5.34 trifft keine Aussage über die Eindeutigkeit des Fixpunktes. Dies ist auch – ohne stärkere Forderungen an f zu stellen – nicht möglich. Solche stärkeren Forderungen werden wir im nächsten Kapitel behandeln.