

Kapitel 3

Reihen

Reihen entstehen aus Folgen durch Bildung von Summen der ersten Folgenglieder. Reihen sind eigentlich nichts wesentlich neues; sie sind selbst wieder Folgen. Aber aufgrund ihrer besonderen Struktur lassen sich spezielle Kriterien für die Konvergenz von Reihen angeben.

3.1 Definition

Definition 3.1 Für eine gegebene Folge (x_k) nennt man

$$S_n := \sum_{k=0}^n x_k$$

die n -te **Partialsomme** [somme partielle] von (x_k) . Die Folge (S_n) der Partialsummen bezeichnet man als **Reihe** [série] der x_k .

Kürzer schreibt man eine Reihe meist mit der Formel $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ und meint damit auch den Grenzwert der Folge (S_n) :

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n x_k,$$

vorausgesetzt dieser existiert. Anderenfalls sagt man, dass die Reihe divergiert. Geht S_n gegen $\pm\infty$, so schreibt man

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k = \infty \quad \text{bzw.} \quad \sum_{k=0}^{\infty} x_k = -\infty.$$

Beispiele. Die Konvergenz der folgenden Reihen wird im Verlaufe dieses Kapitels behandelt:

- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e.$
- $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$, mit einer festen reellen Zahl q , konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$.
In diesem Fall gilt $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, einer festen reellen Zahl α , konvergiert genau dann, wenn $\alpha > 1.$ $\diamond$

Lemma 3.2 Die harmonische Reihe [la série harmonique] divergiert:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

Beweis. Die Divergenz wird nachgewiesen indem wir zeigen, dass (S_n) mit $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ für $n = 1, 2, \dots$ keine Cauchy-Folge ist (siehe Theorem 2.14). Dies folgt sofort aus

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Da (S_n) eine monoton wachsende divergente Folge ist, gilt $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$ $\square$

3.2 Konvergenzkriterien für Reihen

Im allgemeinen ist es schwer, den Grenzwert einer konvergenten Reihe zu finden. Aber es gibt verschiedene Kriterien, mit denen man Konvergenz zeigen kann, ohne den exakten Grenzwert zu kennen (Existenz).

Das folgende Theorem gibt zunächst ein *notwendiges* Kriterium für die Konvergenz einer Reihe an.

Theorem 3.3 Konvergiert die aus einer Folge (x_k) gebildete Reihe, so gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0.$$

Daraus folgt, dass eine Reihe divergiert wenn die zugrundeliegende Folge (x_k) nicht gegen 0 konvergiert. Die Konvergenz von (x_k) gegen 0 ist aber *kein* hinreichendes Kriterium für die Konvergenz der Reihe. Zum Beispiel haben wir in Lemma 3.2 gesehen, dass die harmonische Reihe divergiert obwohl $\frac{1}{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$

Folgendes *hinreichende* Kriterium ähnelt dem Kriterium der zwei Polizisten für Folgen.

Theorem 3.4 (Majorantenkriterium [Critère de comparaison]) Gegeben seien zwei Folgen (x_n) und (y_n) . Existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$0 \leq |x_n| \leq y_n$$

für alle $n \geq N$, dann gelten die beiden folgenden Aussagen:

- (i) Wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} y_k$ konvergiert, dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$.
- (ii) Wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ divergiert, dann divergiert auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} y_k$.

Die entsprechende Übertragung des Quotientenkriteriums für Folgen (siehe Theorem 2.8) ist eines der wichtigsten Konvergenzkriterien für Reihen.

Theorem 3.5 (Quotientenkriterium für Reihen [Critère d'Alembert])

Gegeben sei eine Folge (x_k) mit $x_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die Folge (q_k) der Quotienten

$$q_k = \left| \frac{x_{k+1}}{x_k} \right|$$

und nehmen an, dass diese Folge (q_k) gegen q_{∞} konvergiert.

$$\text{Wenn } q_{\infty} \quad \begin{cases} < 1, & \text{dann konvergiert die Reihe } \sum_{k=0}^{\infty} x_k, \\ > 1, & \text{dann divergiert die Reihe } \sum_{k=0}^{\infty} x_k, \\ = 1, & \text{dann lässt sich nichts sagen über } \sum_{k=0}^{\infty} x_k. \end{cases}$$

Beispiel 3.6 (Geometrische Reihe [série géométrique]) Theorem 3.5 lässt sich unmittelbar auf die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ anwenden. Hier ist die Folge der Quotienten $q_k = \left| \frac{x_{k+1}}{x_k} \right| = |q|$ konstant. Somit ergibt sich Konvergenz für $|q| < 1$ und Divergenz für $|q| > 1$. Für $|q| = 1$ ergibt sich hier sowohl für $q = +1$ als auch für $q = -1$ Divergenz.

Allerdings lernen wir daraus nichts über den Grenzwert der Reihe für $|q| < 1$. Betrachte dazu die n -te Partialsumme

$$S_n = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n.$$

Aus $S_n - qS_n = 1 - q^{n+1}$ folgt die explizite Darstellung

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q},$$

die für alle $q \neq 1$ gültig ist. Für $|q| < 1$ ergibt sich daraus

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 - q}.$$

◇

Ein weiteres wichtiges Konvergenzkriterium für Reihen ist das Folgende.

Theorem 3.7 (Wurzelkriterium [Critère de la limite supérieure]) Gegeben sei eine Folge (x_k) und betrachte

$$\ell_k = \sqrt[k]{|x_k|}.$$

Sollte die Folge (ℓ_k) beschränkt sein, dann gilt:

$$\text{Wenn } \limsup_{k \rightarrow \infty} \ell_k \begin{cases} < 1, & \text{dann konvergiert die Reihe } \sum_{k=0}^{\infty} x_k, \\ > 1, & \text{dann divergiert die Reihe } \sum_{k=0}^{\infty} x_k, \\ = 1, & \text{dann lässt sich nichts sagen über } \sum_{k=0}^{\infty} x_k. \end{cases}$$

Beispiele. Die Anwendung des Wurzelkriteriums verdeutlichen die beiden folgende Beispiele:

- Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ mit $x_k = \left(\frac{k}{2k+1}\right)^k$ konvergiert nach dem Wurzelkriterium, denn es gilt $\sqrt[k]{|x_k|} = \frac{k}{2k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} < 1$.
- Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ mit $x_0 = 0$ und $x_k = \frac{(k+1)^{k^2}}{k^{k^2} 2^k}$ für $k \geq 1$ divergiert nach dem Wurzelkriterium, denn hier ist $\sqrt[k]{|x_k|} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{e}{2} > 1$.
- Über die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ mit $x_k = k^{-2}$ lässt sich mit dem Wurzelkriterium nichts aussagen, da hier $x_k^{1/k} = k^{-2/k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1$. $\diamond$

Sei (x_k) eine Folge mit konstantem Vorzeichen, dass heisst entweder sind alle x_k nichtnegativ oder alle x_k sind nichtpositiv. Dann ist die Folge (S_n) der Partialsummen $S_n = \sum_{k=0}^n$ monoton steigend bzw. monoton fallend. Nach Theorem 2.6 konvergiert (S_n) genau dann wenn S_n beschränkt ist. Als Beispiel für dieses Kriterium betrachten wir die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}, \quad p \geq 0.$$

Für $p = 1$ ergibt sich die divergente harmonische Reihe. Aufgrund des Majorantenkriteriums ist damit die Reihe divergent für alle $0 \leq p \leq 1$. Wir zeigen nun, dass die Reihe konvergent ist für $p > 1$. Alle Folgenglieder sind positiv, es bleibt also zu zeigen, dass die Partialsummen beschränkt sind. Für jedes $n \geq 1$ gilt

$$\begin{aligned} S_n &\leq S_{2n+1} = 1 + \sum_{k=2}^{2n+1} \frac{1}{k^p} = 1 + \sum_{\ell=1}^n \frac{1}{(2\ell)^p} + \sum_{\ell=1}^n \frac{1}{(2\ell+1)^p} \\ &\leq 1 + \sum_{\ell=1}^n \frac{1}{(2\ell)^p} + \sum_{\ell=1}^n \frac{1}{(2\ell)^p} = 1 + \sum_{\ell=1}^n \frac{2}{2^p 2^\ell} = 1 + \frac{1}{2^{p-1}} S_n. \end{aligned}$$

Da $1/2^{p-1} < 1$ folgt $S_n \leq \frac{1}{1-1/2^{p-1}}$ und damit konvergiert die Reihe. Es ist allerdings nicht leicht, den konkreten Grenzwert zu ermitteln. Später werden wir sehen, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \pi^2/6$.

Für Reihen deren Reihenglieder (d.h. die Koeffizienten der Summe) abwechselnd positives und negatives Vorzeichen aufweisen, existiert ein spezialisiertes Konvergenzkriterium.

Theorem 3.8 (Kriterium für alternierende Reihen [Critère de Leibniz]) Gegeben sei eine Folge (x_k) . Angenommen es existiert $K \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \geq K$ die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

$$(i) \quad x_k \cdot x_{k+1} \leq 0, \quad (\text{alternierende Folge})$$

$$(ii) \quad |x_{k+1}| \leq |x_k|, \quad (\text{im Betrag monoton fallende Folge})$$

$$(iii) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0.$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$.

Als interessante Folgerung aus Theorem 3.8 ergibt sich, dass die **alternierende harmonische Reihe** [*série alternée harmonique*]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

konvergiert, wohingegen die harmonische Reihe selbst divergiert (siehe Lemma 3.2).

Beispiel 3.9 Definiert man eine Folge (x_k) durch

$$x_k = \begin{cases} \frac{1}{k}, & \text{wenn } k > 0 \text{ gerade ist,} \\ \frac{-1}{k^2}, & \text{wenn } k \text{ ungerade ist,} \end{cases}$$

so erfüllt (x_k) zwei der drei Bedingungen des obigen Kriteriums für alternierende Reihen, aber die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ divergiert. Währenddessen liefert die Folge (y_k) mit

$$y_k = \begin{cases} \frac{1}{k^2}, & \text{wenn } k > 0 \text{ gerade ist,} \\ \frac{-1}{k^3}, & \text{wenn } k \text{ ungerade ist,} \end{cases}$$

die konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$. ◇

3.3 Absolute Konvergenz

Reihen, deren Konvergenz von den Vorzeichen der Folgenglieder abhängt, sind oftmals recht schwierige Zeitgenossen die mit Vorsicht zu behandeln sind. Zum Beispiel kann eine Umordnung der Folgenglieder den Grenzwert verändern oder sogar die Konvergenz zerstören. Diese Schwierigkeiten verschwinden, wenn man einen stärkeren Form der Konvergenz fordert.

Definition 3.10 Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ heisst **absolut konvergent** [absolut convergente], wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|$ konvergiert.

Mittels dem Majorantenkriterium (Theorem 3.4) sieht man sofort, dass absolute Konvergenz immer die (normale) Konvergenz einer Reihe nach sich zieht. Die Umkehrung ist im Allgemeinen nicht möglich, wie das Beispiel der alternierenden harmonischen Reihe zeigt, die nur konvergent aber nicht absolut konvergent ist.

Lemma 3.11 Sei (x_k) eine Folge, so dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ absolut konvergent ist. Dann kann man die Folge beliebig umordnen und erhält den gleichen Grenzwert. Genauer: Sei $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Abbildung so dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ genau ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, mit $\sigma(k) = m$ und betrachte die neue Folge (y_k) mit $y_k = x_{\sigma(k)}$. Dann gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_k = \sum_{k=0}^{\infty} x_k.$$

Bemerkung 3.12 Wenn das Quotientenkriterium (Theorem 3.5) mit $q_{\infty} < 1$ erfüllt ist, so konvergiert die Reihe nicht nur im normalen Sinn sondern auch absolut. Selbiges gilt auch für das Wurzelkriterium (Theorem 3.7), wenn dort $\limsup_{k \rightarrow \infty} \ell_k < 1$ erfüllt ist.

3.4 Potenzreihen

Potenzreihen sind Reihen mit einer besonderen Struktur, die uns im Zusammenhang mit Funktionen im übernächsten Kapitel noch näher beschäftigen werden.

Definition 3.13 Gegeben sei eine Folge (a_k) und eine Zahl $x_0 \in \mathbb{R}$. Wir nennen eine Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

Potenzreihe [séries entières], wobei $x \in \mathbb{R}$ als eine Unbestimmte interpretiert wird.

Potenzreihen können als verallgemeinerte Polynome von „unendlichem Grad“ aufgefasst werden. Natürlich sind Polynome auch nichts anderes als Potenzreihen, bei denen aber nur endlich viele Koeffizienten verschieden von 0 sind.

Potenzreihen sind also Reihen, bei denen die Reihenglieder von der Unbestimmten $x \in \mathbb{R}$ abhängen. Es ist somit von Interesse, wie diese Zahl x die Konvergenzeigenschaften der Reihe beeinflusst. Eine Potenzreihe konvergiert natürlich immer für $x = x_0$ (nämlich gegen a_0). Eine wichtige Frage ist, wie weit man sich von x_0 entfernen kann ohne dass Konvergenz verloren geht.

Definition 3.14 Der **Konvergenzradius** [*rayon de convergence*] R einer Potenzreihe ist definiert als

$$R := \sup \left\{ |x - x_0| : \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \text{ ist konvergent} \right\}.$$

Das Quotientenkriterium ist das wichtigste Werkzeug bei der Bestimmung des Konvergenzradius.

Theorem 3.15 Gegeben sei eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ mit $a_k \neq 0$ für genügend grosse k . Existiert der Grenzwert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = q_{\infty}, \quad (3.1)$$

dann ist der Konvergenzradius der Potenzreihe $R = 1/q_{\infty}$.

Ausserdem konvergiert die Potenzreihe absolut für alle $x \in]x_0 - R, x_0 + R[$ und divergiert für alle $x \notin [x_0 - R, x_0 + R]$.

Beweis. Wir wenden das Quotientenkriterium für Reihen (Theorem 3.5 und Bemerkung 3.12) auf die Folge $(a_k(x - x_0)^k)$ an. Dazu berechnen wir den Grenzwert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}(x - x_0)^{k+1}}{a_k(x - x_0)^k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| |x - x_0| = q_{\infty} |x - x_0|.$$

Somit konvergiert die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ absolut, wenn $q_{\infty} |x - x_0| < 1$. Umgekehrt divergiert sie, wenn $q_{\infty} |x - x_0| > 1$. $\square$

Einige Bemerkungen zum Verständnis von Theorem 3.15:

- Aus $q_{\infty} = 0$ folgt $R = \infty$. In Worten: Die Potenzreihe konvergiert in diesem Fall für alle $x \in \mathbb{R}$.
- Die Definition des Konvergenzradius sagt (wegen dem Supremum in der Definition) nichts über das Konvergenzverhalten am Rand, also für $x = x_0 \pm R$,

aus. Jede der vier Mengen

$$[x_0 - R, x_0 + R], \quad]x_0 - R, x_0 + R], \quad [x_0 - R, x_0 + R[, \quad]x_0 - R, x_0 + R[$$

ist als **Konvergenzmenge** möglich. Zum Beispiel haben die folgenden drei Potenzreihen jeweils den Konvergenzradius $R = 1$, weisen aber ein unterschiedliches Verhalten am Rand auf:

1. Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ konvergiert an keinem der Randpunkte; die Konvergenzmenge ist also $] - 1, 1[$.
 2. Die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$ konvergiert an beiden Randpunkten; die Konvergenzmenge ist also $[-1, 1]$.
 3. Die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ konvergiert am linken Randpunkt (alternierende harmonische Reihe) aber nicht am rechten Randpunkt (harmonische Reihe); die Konvergenzmenge ist also $[-1, 1[$.
- In Ausnahmefällen existiert der Grenzwert in (3.1) nicht, dann ist Theorem 3.15 nicht anwendbar. Zum Beispiel trifft dies zu auf die Koeffizientenfolge

$$1, 1, 1, 1/2, 1, 1/3, 1, 1/4, 1, 1/5, \dots$$

also $a_{2k} = 1, a_{2k+1} = 1/k$. Eine alternative (und meist mühsamere) Möglichkeit, den Konvergenzradius zu bestimmen, ist die **Formel von Cauchy-Hadamard** (vgl. Wurzelkriterium, Theorem 3.7):

$$R = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sqrt[k]{|a_k|} \right)}.$$

Das wichtigste Beispiel einer Potenzreihe ist die Exponentialreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, die wir (indirekt) schon aus Abschnitt 2.5 kennen. Aus dem obigen Quotientenkriterium folgt $R = \infty$ für diese Potenzreihe.

Definition 3.16 Für jede reelle Zahl x schreibt man

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Die Funktion, die jedem $x \in \mathbb{R}$ die Zahl e^x zuordnet, heisst **Exponentialfunktion**.

Wir erinnern an die Eulerzahl aus Abschnitt 2.5:

$$e = e^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n.$$

Allgemeiner gilt für beliebiges $x \in \mathbb{R}$

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n.$$

Das folgende Lemma stellt einen direkten Zusammenhang her.

Lemma 3.17 $\exp(x) = e^x$.

Beweis. Das Resultat folgt aus

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \right| &= \left| \sum_{k=0}^n \left[\frac{x^k}{k!} - \binom{n}{k} \frac{x^k}{n^k} \right] \right| \\
 &\leq \sum_{k=0}^n \frac{|x|^k}{k!} \left| 1 - \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \right| \\
 &\leq \sum_{k=0}^n \frac{|x|^k}{k!} \left| 1 - \frac{(n-k+1)^k}{n^k} \right| = \sum_{k=0}^n \frac{|x|^k}{k!} \left| 1 - \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)^k \right| \\
 &\leq \sum_{k=0}^n \frac{|x|^k}{k!} \left| 1 - \left(1 - \frac{k(k-1)}{n}\right) \right| = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \frac{|x|^k k(k-1)}{k!} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \frac{|x|^k}{(k-2)!} = \frac{|x|^2}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{|x|^k}{k!} \leq \frac{\exp(|x|)|x|^2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.
 \end{aligned}$$

□

Lemma 3.18 Für die Exponentialfunktion gilt

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y),$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Beweis. Dies folgt aus

$$\begin{aligned}
 \exp(x) \cdot \exp(y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 + \frac{y}{n}\right) \right)^n \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x+y}{n} + \frac{x \cdot y}{n^2} \right)^n \\
 &\stackrel{?}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x+y}{n} \right)^n = \exp(x+y).
 \end{aligned}$$

Dabei muss die tatsächliche Gültigkeit der Gleichheit in $\stackrel{?}{=}$ noch geklärt werden.

Allgemeiner werden wir sogar zeigen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n} + \frac{s}{n^2} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n} \right)^n \quad (3.2)$$

für alle $r, s \in \mathbb{R}$ gilt. Dazu berechnen wir für $n > |s|, |r|$:

$$\left(1 + \frac{r}{n} + \frac{s}{n^2} \right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{n-k} \frac{s^k}{n^{2k}} = \left(1 + \frac{r}{n} \right)^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{n-k} \frac{s^k}{n^{2k}}.$$

Es genügt zu zeigen, dass der zweite Term gegen 0 geht:

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n-k} \frac{s^k}{n^{2k}} \right| \leq \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \left(1 + \frac{|r|}{n}\right)^{n-k} \frac{|s|^k}{n^{2k}} \\
 & \leq \left(1 + \frac{|r|}{n}\right)^n \left|\frac{s}{n}\right| \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \left(1 + \frac{|r|}{n}\right)^n \left|\frac{s}{n}\right| \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \\
 & \leq \exp(|r|) \left|\frac{s}{n}\right| (e - 1) .
 \end{aligned}$$

Der letzte Term geht gegen 0, da $|\frac{s}{n}|$ gegen 0 geht, wenn n wächst. $\square$