

Kapitel 2

Folgen und Grenzwerte

Folgen von reellen Zahlen begegnen uns ständig im Leben; der tägliche Franken-Euro-Wechselkurs, die tägliche Niederschlagsmenge, ... In diesem Kapitel werden wir uns besonders damit beschäftigen wie sich eine über mathematische Regeln beschriebene Folge langfristig verhält: Pegelt sich die Folge nach einiger Zeit auf einen Wert ein (Konvergenz?) oder wächst sie unbegrenzt an (Beschränktheit?).

2.1 Folgen

Definition 2.1 Eine **Folge reeller Zahlen** [*suite de nombres*] ordnet jeder natürlichen Zahl $0, 1, 2, \dots$ eine reelle Zahl $a_0, a_1, a_2, \dots$ zu. Die gesamte Folge wird mit $(a_n)_{n=0}^\infty$, oder kürzer mit (a_n) , oder noch kürzer mit a bezeichnet.

Eine Folge a heißt:

- **konstant** wenn es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $a_n = C$ für alle $n = 0, 1, 2, \dots$ gilt (man schreibt auch $a \equiv C$).
- **beschränkt** wenn es Zahlen $m, M \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $m \leq a_n \leq M$ für alle $n = 0, 1, 2, \dots$ gilt. Entsprechend nennt man eine Folge **nach oben beschränkt** und **nach unten beschränkt**.
- **monoton wachsend** [*monotone croissante*] wenn $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n = 0, 1, 2, \dots$ gilt.
- **monoton fallend** [*monotone décroissante*] wenn $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n = 0, 1, 2, \dots$ gilt.
- **strikt monoton wachsend** bzw. **strikt monoton fallend** wenn $a_{n+1} > a_n$ bzw. $a_{n+1} < a_n$ für alle $n = 0, 1, 2, \dots$ gilt.

Im Alltag sind Folgen häufig periodisch gemessene Daten, wie zum Beispiel die tägliche Mittagstemperatur in Ecublens. Im Gegensatz dazu werden wir in diesem Kapitel nur Folgen betrachten, die über mathematische Regeln definiert sind. Einige Beispiele:

- Eine Folge kann explizit gegeben sein:

$$a_n = \frac{1}{n+1}.$$

Diese Folge ist strikt monoton fallend.

- Eine Folge kann rekursiv gegeben sein:

$$a_0 = \frac{3}{2}, \quad a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}.$$

Diese Folge ist strikt monoton fallend, während

$$b_0 = 1, \quad b_{n+1} = 2 - \frac{1}{b_n}$$

konstant ist.

- Eine Dezimaldarstellung [*représentation décimale*] einer reellen Zahl r ist eine Folge

$$\pm b_0, b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 \dots$$

wobei jede Ziffer b_i eine natürliche Zahl zwischen 0 und 9 ist. Eine solche Darstellung ergibt eine andere, monoton wachsende Folge rationaler Zahlen:

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_0 + \frac{b_1}{10}, \quad a_2 = b_0 + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{100}, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{b_{n+1}}{10^{n+1}}.$$

Die ursprüngliche Zahl r ergibt sich aus $r = \sup\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Um die Darstellung eindeutig werden zu lassen, verbietet man häufig, dass die Folge (b_n) ab einer gewissen Stelle nur noch aus Neunen besteht.

- Auch eine mathematisch definierte Folge kann keine explizite „Formel“ zulassen: Zum Beispiel ist (p_n) , wobei p_n die n -te Primzahl ist ($p_0 = 2, p_1 = 3, p_2 = 5, \dots$), eine strikt monoton wachsende Folge.
- Die Folge der **Fibonacci-Zahlen** ist rekursiv definiert:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+2} = a_n + a_{n+1}.$$

Diese Folge wächst sehr schnell an. Es ist möglich (aber nicht ganz so einfach) eine explizite Formel für a_n zu finden:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Bemerkung 2.2 Die Bildmenge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ einer Folge (a_n) enthält nur einen Teil der Information! Zum Beispiel haben die beiden Folgen

$$a_n = (-1)^n \text{ für } n \in \mathbb{N}, \quad b_0 = -1, \quad b_n = 1 \text{ für } n \geq 1,$$

das gleiche Bild aber nur die zweite ist monoton wachsend.

2.2 Konvergenz und Grenzwerte

Definition 2.3 Eine Folge (a_n) **konvergiert** gegen [converge vers] $a_\infty \in \mathbb{R}$ wenn für jedes (noch so kleine) $\varepsilon > 0$ ein $N = N_\varepsilon$ existiert so dass

$$|a_\infty - a_n| < \varepsilon \quad \text{für alle } n > N.$$

Wir nennen a_∞ **Grenzwert** [limite] von (a_n) und schreiben $a_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ oder auch $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a_\infty$.

Bildlich kann man sich Definition 2.3 als einen ε -Schlauch um a_∞ vorstellen. Aus diesem kommt die Folge für genügend grosse n nie wieder heraus. Besitzt eine Folge keinen Grenzwert, so sagt man dass sie **divergiert** [diverge].

Im Prinzip kann man immer per Definition 2.3 nachprüfen, ob eine Folge konvergiert. Dies ist mitunter recht umständlich und soll nur für zwei Beispiele demonstriert werden. Im Verlauf der Vorlesung werden wir weitaus komfortablere Konvergenzkriterien kennenlernen.

- Die Folge $a_n = 1/(n+1)$ konvergiert gegen 0.

Nachweis: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine natürliche Zahl N so dass $N+1 > \frac{1}{\varepsilon}$, also $\frac{1}{N+1} < \varepsilon$. Damit gilt für $n > N$:

$$0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{N+1} < \varepsilon.$$

und es folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/(n+1) = 0$.

- Die Folge $a_0 = 2, a_{n+1} = 2 + 1/a_n$ für $n = 1, 2, \dots$ konvergiert gegen $a_\infty = 1 + \sqrt{2}$.

Nachweis: Aus $a_\infty = 2 + 1/a_\infty$ folgt

$$\begin{aligned} |a_n - a_\infty| &= |2 + 1/a_{n-1} - (2 + 1/a_\infty)| = |1/a_{n-1} - 1/a_\infty| \\ &= \frac{|a_{n-1} - a_\infty|}{|a_\infty| |a_{n-1}|} \leq \frac{|a_{n-1} - a_\infty|}{4}, \end{aligned}$$

da $a_{n-1} \geq 2$ für alle n und $a_\infty > 2$. Rekursiv angewandt ergibt diese Ungleichung

$$|a_n - a_\infty| \leq \frac{|a_{n-1} - a_\infty|}{4} \leq \frac{|a_{n-2} - a_\infty|}{4^2} \leq \dots \leq \frac{|a_0 - a_\infty|}{4^n} \leq \frac{1}{4^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

und damit konvergiert a_n gegen a_∞ .

Bemerkung: Diese Folge ist ein Paradebeispiel dafür, wie man aus einer Gleichung $x = f(x)$ eine Folge $x_{n+1} = f(x_n)$ gewinnen kann. Unter Umständen (die im Verlaufe der Vorlesung noch geklärt werden) konvergiert diese sogar gegen eine Lösung von $x = f(x)$! Solche Gleichungen nennt man Fixpunktgleichungen und die dazugehörige Folge Fixpunktiteration.

Einige weitere Beispiele:

- Die Folge $a_n = q^n$ für eine reelle Zahl q konvergiert gegen 0 wenn $|q| < 1$. Sie divergiert wenn $|q| > 1$. Wenn $q = 1$, dann konvergiert sie gegen 1 und wenn $q = -1$, so divergiert sie.
- Die beiden Folgen der Bemerkung 2.2 sind beschränkt, aber a_n divergiert und b_n konvergiert!
- Die Folge $a_0 = 1$, $a_n = q^{\frac{1}{n}}$ für $n = 1, 2, \dots$ und eine reelle Zahl $q \geq 0$ konvergiert gegen 0 wenn $q = 0$, und gegen 1 andernfalls.
- Die Folge $a_0 = 1$, $a_n = n^{\frac{1}{n}}$ für $n = 1, 2, \dots$ konvergiert gegen 1.
- Die Folge (a_n) rekursiv gegeben durch

$$a_0 = q, \quad a_{n+1} = 2 - 1/a_n \text{ für eine gewisse reelle Zahl } q \in \mathbb{R}$$

kann nur gegen eine Zahl a_∞ konvergieren, die

$$a_\infty = 2 - 1/a_\infty$$

erfüllt, also gegen $a_\infty = 1$. Aber es muss noch für jedes q verifiziert werden, ob sie nun tatsächlich konvergiert.

Konvergente Folgen können nicht unbeschränkt wachsen.

Lemma 2.4 Sei (x_n) eine Folge die gegen x_∞ konvergiert. Dann ist (x_n) beschränkt.

Beweis. Wähle $\varepsilon = 1$. Mit der Definition 2.3 gibt es eine (grosse) Zahl $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geq N$ die Ungleichung $|x_n - x_\infty| < 1$ gilt. Also gilt

$$|x_n| = |x_\infty - (x_\infty - x_n)| \leq |x_\infty| + |x_n - x_\infty| < |x_\infty| + 1,$$

für jedes $n \geq N$. Setzen wir $M = \max\{x_0, x_1, \dots, x_N, |x_\infty| + 1\}$, so gilt also $|x_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (damit ist $M, -M$ obere/untere Schranke der Bildmenge von (x_n)).
□

2.2.1 Rechenregeln für Grenzwerte

Arithmetische Operationen (Addition, Multiplikation, ... der Folgenglieder) ziehen (fast) immer die entsprechenden Operationen mit den Grenzwerten nach sich. Man muss nur ein wenig bei der Division aufpassen.

Die folgenden Regeln gelten für zwei gegebene Folgen $(a_n), (b_n)$.

1. Wenn beide, $(a_n), (b_n)$, konvergieren, so konvergieren auch die Folgen $(a_n + b_n)$ und $(a_n - b_n)$. Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

2. Wenn beide, $(a_n), (b_n)$, konvergieren, so konvergiert auch die Folge $(a_n \cdot b_n)$ und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

3. Wenn beide, $(a_n), (b_n)$, konvergieren, alle b_n verschieden von Null sind, und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$, so konvergiert auch die Folge $(\frac{a_n}{b_n})$, und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

4. Wenn beide, $(a_n), (b_n)$, konvergieren, und es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für $n \geq N$ gilt

$$a_n \leq b_n.$$

Dann gilt auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Wichtig ist, dass auch wenn $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, sie doch den gleichen Grenzwert haben können: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Rationale Ausdrücke. Mit der Quotientenregel lassen sich Grenzwerte rationaler Funktionen leicht ausrechnen. Zum Beispiel

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - n + 4}{4n^3 + 2n^2 - 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3(2 - n^{-2} + 4n^{-3})}{n^3(4 + 2n^{-1} - n^{-3})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - n^{-2} + 4n^{-3}}{4 + 2n^{-1} - n^{-3}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Allgemein gilt für die Ausdrücke

$$z_n = \frac{a_0 + a_1 n + \dots + a_p n^p}{b_0 + b_1 n + \dots + b_q n^q}, \quad n \in \mathbb{N}$$

mit $a_p \neq 0$, $b_q \neq 0$ und so, dass der Nenner keine ganzzahlige nicht-negative Nullstelle hat, folgendes. Ist

- $p < q$ so konvergiert (z_n) mit $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$,
- $p > q$ so divergiert (z_n) ,
- $p = q$ so konvergiert (z_n) mit $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{a_p}{b_q}$.

Bemerkung 2.5 Es gibt natürlich noch weitere Rechenregeln für Grenzwerte, die wir insbesondere im Zusammenhang mit reellen Funktionen noch kennen lernen werden. Beispiele dafür sind

- Falls $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_\infty$ dann folgt aus der umgekehrten Dreiecksungleichung und Def. 2.3 auch $|x_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |x_\infty|$.

- Falls $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_\infty$ und $x_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann folgt $\sqrt[k]{x_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{x_\infty}$ für $k \in \mathbb{N}$ mit $k \neq 0$. **Nachweis.** Wir nutzen

$$a^k - b^k = (a - b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \dots + ab^{k-2} + b^{k-1}), \quad a = \sqrt[k]{x_n}, \quad b = \sqrt[k]{x_\infty},$$

im Fall $x_\infty > 0$. Dann folgt

$$|\sqrt[k]{x_n} - \sqrt[k]{x_\infty}| = \frac{|x_n - x_\infty|}{|x_n^{\frac{k-1}{k}} + x_n^{\frac{k-2}{k}}x_\infty + \dots + x_\infty^{\frac{k-2}{k}}x_n + x_\infty^{\frac{k-1}{k}}|} < \frac{|x_n - x_\infty|}{x_\infty^{\frac{k-1}{k}}},$$

woraus Konvergenz folgt. Ist $x_\infty = 0$, so haben wir mit der Definition der Konvergenz von (x_n) schon $x_n < \varepsilon^k$ für $\varepsilon > 0$ und $n \geq N$. Dann folgt $\sqrt[k]{x_n} < \varepsilon$ für $n \geq N$ ebenfalls wegen der Monotonie der Wurzel.

2.2.2 Konvergenzkriterien für Folgen

Bei der Konvergenzanalyse von Folgen sind die folgenden drei Fragestellungen von Interesse:

Existenz: Hat eine gegebene Folge einen Grenzwert?

Eindeutigkeit: Wenn es einen gibt, ist er dann eindeutig?

Konstruktion: Wie finde ich den Grenzwert?

Am einfachsten ist die Frage nach der Eindeutigkeit zu beantworten.

Theorem 2.6 (Eindeutigkeit des Grenzwertes für Folgen) Wenn eine Folge (a_n) gegen a_∞ und a'_∞ konvergiert, so gilt $a_\infty = a'_\infty$.

Beweis. Der Beweis erfolgt per Widerspruch. Unter der Annahme $a_\infty \neq a'_\infty$ ist $\delta = |a_\infty - a'_\infty| > 0$. Setze $\varepsilon := \frac{1}{3}\delta > 0$. Dann gibt es zu ε natürliche Zahlen N, N' so dass für alle $n \geq \max\{N, N'\}$ die Ungleichungen

$$|a_n - a_\infty| \leq \varepsilon, \quad |a_n - a'_\infty| \leq \varepsilon$$

erfüllt sind. Damit folgt

$$\delta = |a_\infty - a'_\infty| = |a_\infty - a_n + a_n - a'_\infty| \leq |a_\infty - a_n| + |a_n - a'_\infty| \leq \frac{2}{3}\delta.$$

Ein Widerspruch! Also muss $a_\infty = a'_\infty$ gelten. $\square$

Eine konvergente Folge ist beschränkt, während eine beschränkte Folge aber nicht unbedingt konvergieren muss.

Ist aber nun eine Folge monoton **und** beschränkt, so bleibt ihr gar nichts anderes übrig als gegen einen Grenzwert zu konvergieren.

Theorem 2.7 (Konvergenz monotoner Folgen)

- Eine monoton wachsende Folge konvergiert genau dann, wenn sie nach oben beschränkt ist.

- Eine monoton fallende Folge konvergiert genau dann, wenn sie nach unten beschränkt ist.

Beweis. Wir beweisen die Aussage für monoton wachsende Folgen, sei also (x_n) eine solche Folge. $\Rightarrow$: Ist (x_n) eine konvergente Folge, so wissen wir sie ist auch beschränkt. $\Leftarrow$: Ist (x_n) nun nach oben beschränkt, so gibt es $x_\infty = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und wir behaupten das ist der Grenzwert. Sei $\varepsilon > 0$, dann ist aber $x_\infty - \varepsilon$ keine obere Schranke und wir wissen es folgt: Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_\infty - \varepsilon < x_N$. Wegen der Monotonie ist

$$x_\infty - \varepsilon < x_n \leq x_\infty, \quad \forall n \geq N.$$

Das ist genau die Definition der Konvergenz. $\square$

Genauer konvergiert also eine (nach oben beschränkte) monoton wachsende Folge (x_n) gegen das Supremum $\sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und eine (nach unten beschränkte) fallende Folge gegen das Infimum.

Manchmal lassen sich für eine gegebene Folge zwei einfachere Folgen finden (für die man den Grenzwert kennt), welche die Folge immer mehr “einengen” bis ihr nichts anderes übrig bleibt als auch gegen den Grenzwert zu konvergieren.

Theorem 2.8 (Kriterium der zwei Polizisten für Folgen) Gegeben seien zwei Folgen $(a_n), (c_n)$ die beide gegen $r \in \mathbb{R}$ konvergieren. Sei $N \in \mathbb{N}$ so dass für jedes $n \geq N$

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

gilt. Dann konvergiert auch (b_n) gegen r .

Theorem 2.9 (Quotientenkriterium für Folgen [Critère d’Alembert]) Gegeben sei eine Folge (a_n) so dass $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die Folge (q_n) der Quotienten

$$q_n = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

und nehmen an, dass diese Folge (q_n) gegen q_∞ konvergiert.

$$\text{Wenn } q_\infty \begin{cases} < 1 & \text{dann konvergiert } (a_n) \text{ gegen } 0, \\ > 1 & \text{dann divergiert } (a_n), \\ = 1 & \text{dann lässt sich nichts sagen über } (a_n). \end{cases}$$

Als Beispiel für das Quotientenkriterium betrachten wir die Folge $a_n = \frac{2^n}{n!}$. Wir haben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0.$$

Also konvergiert (a_n) gegen 0.

2.2.3 $\limsup$ und $\liminf$

Eine beschränkte Folge (x_n) konvergiert nicht notwendigerweise. Wir können aber aus (x_n) zwei neue Folgen

$$y_n = \inf \{x_m \mid m \geq n\} \quad z_n = \sup \{x_m \mid m \geq n\} \quad (2.1)$$

bilden. Die Folge (y_n) ist monoton wachsend, während (z_n) monoton fallend ist. Es gilt ausserdem

$$y_n \leq x_n \leq z_n. \quad (2.2)$$

Da beide Folgen beschränkt sind, konvergieren sie gemäss Theorem 2.7. Dies erlaubt die Definition von $\liminf$ [*limite inférieure*] und $\limsup$ [*limite supérieure*]:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n := \lim_{n \rightarrow \infty} y_n, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n := \lim_{n \rightarrow \infty} z_n.$$

Theorem 2.10 *Sei (x_n) beschränkt. Dann konvergiert (x_n) genau dann, wenn*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

2.2.4 Teilfolgen

Wie oben gesehen kann man aus einer Folge (x_n) eine neue bilden, in dem man nur einen *Teil* der Indizes auswählt.

Definition 2.11 *Eine Folge $(x_{n_k})_{k \geq 0}$ heisst eine **Teilfolge** [*sous-suite*] der Folge $(x_n)_{n \geq 0}$, falls die Folge (natürlicher Zahlen) $(n_k)_{k \geq 0}$ streng monoton wachsend ist.*

Theorem 2.12 (Konvergenz von Teilfolgen) *Eine Folge (x_n) konvergiert genau dann, wenn jede ihrer Teilfolgen konvergiert.*

Beweis. $\Leftarrow$: Wenn jede Teilfolge von (x_n) konvergiert, so gilt das auch für (x_{n_k}) mit $n_k = k$ und $k \in \mathbb{N}$ also die Folge selbst. $\Rightarrow$: Sei $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_\infty$ der Grenzwert von (x_n) , also für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_\infty| < \varepsilon$ falls $n \geq N$. Für jede Teilfolge $(x_{n_k})_k$ von $(x_n)_n$ ist $(n_k)_k$ streng monoton wachsend, also gibt es ein $K \in \mathbb{N}$ mit $n_k \geq N$ falls $k \geq K$. Für solche n_k folgt dann $|x_{n_k} - x_\infty| < \varepsilon$. $\square$

Für beschränkte Folgen ist das folgende Resultat ein Kriterium um die Existenz von konvergenten Teilfolgen nachzuweisen.

Theorem 2.13 (Satz von Bolzano-Weierstraß) *Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge.*

Wir wollen ein Beispiel sehen und zwei Bemerkungen machen.

- Sei (x_n) die Folge mit $x_n = (-1)^n$ und $n \in \mathbb{N}$. Wir wissen, dass diese Folge nicht konvergiert aber offensichtlich beschränkt ist. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass gibt es mindestens eine konvergente Teilfolge: Hier ist klar, dass $x_{2k} = (-1)^{2k} = 1$ und $x_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1$ als konstante Teilfolgen jeweils gegen ± 1 konvergieren.
- Man braucht für den Satz unbedingt, dass (x_n) beschränkt ist. Denn $x_n = (-1)^n \cdot n$ hat zum Beispiel nur divergente Teilfolgen.

- Wenn (x_n) nicht beschränkt ist, so kann es natürlich aber trotzdem konvergente Teilfolgen geben. Denn

$$x_n = \begin{cases} n & n \text{ gerade} \\ n^{-1} & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

hat zum Beispiel die Teilfolge $x_{2k+1} = \frac{1}{2k+1}$ aber (x_n) ist nicht nach oben beschränkt.

2.2.5 Cauchy-Folgen

Definition 2.14 Eine Folge (x_n) heisst **Cauchy-Folge** [suite de Cauchy] wenn es für jedes ε ein $N \in \mathbb{N}$ gibt so dass

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \quad \text{für alle } n, m > N.$$

In allgemeineren Situationen (allgemeiner als $\mathbb{R}$) ist die Definition der Cauchy-Folge viel schwächer als Konvergenz. Im $\mathbb{R}$ gibt es keinen Unterschied.

Theorem 2.15 (Cauchy Kriterium für Folgen [Critère de Cauchy]) Eine Folge (x_n) konvergiert genau dann wenn sie Cauchy-Folge ist.

Beweis. “ $\Rightarrow$ ”: Sei zunächst (x_n) eine konvergente Folge mit Grenzwert x_∞ . Sei weiter ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es zu ε ein $N \in \mathbb{N}$ so dass für jedes $m, n \geq N$ sowohl $|x_n - x_\infty| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$ als auch $|x_m - x_\infty| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$ gelten. Aus

$$|x_m - x_n| = |x_m - x_\infty + x_\infty - x_n| \leq |x_n - x_\infty| + |x_m - x_\infty| \leq \varepsilon,$$

folgt, dass (x_n) Cauchy-Folge ist.

“ $\Leftarrow$ ”: Sei nun (x_n) eine Cauchy-Folge. Zunächst zeigen wir, dass sie beschränkt ist: Zu $\varepsilon = 1$ gibt es N_1 , so dass für alle $n \geq N_1$

$$|x_n - x_{N_1}| \leq \varepsilon$$

gilt. Gemäss dem Satz von Bolzano-Weierstraß (Theorem 2.13) gibt es also eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) und wir setzen $x_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$. Laut der Definition (der Konvergenz und der Cauchy Eigenschaft) gibt es zu $\varepsilon > 0$ nun $N, K \in \mathbb{N}$ so, dass

$$|x_n - x_m| < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad |x_n - x_\infty| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

wenn $n, m \geq N$ und $k \geq K$. Nun sei $l \in \mathbb{N}$, $l > \max\{N, K\}$, also wegen $n_l \geq l$ (strikt monoton) auch

$$|x_n - x_\infty| \leq |x_n - x_{n_l}| + |x_{n_l} - x_\infty| < 2\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right) = \varepsilon$$

für $n \geq N$. $\square$

Das Cauchy-Kriterium ist kein einfach zu handhabendes Kriterium und sollte nur eingesetzt werden wenn andere Kriterien zu keinem Ergebnis führen!

Beispiel 2.16 Wir betrachten (x_n) mit $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k^3}$, also

$$x_1 = -1, \quad x_2 = -1 + \frac{1}{8}, \quad x_3 = -1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{27}, \quad \dots$$

Die ersten beiden Kriterien sind hier weniger praktisch und das Quotientenkriterium liefert $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1$ (Erinnerung $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |\lim_{n \rightarrow \infty} a_n|$).

Es folgt aber für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n \geq 1$

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= \left| \frac{(-1)^m}{m^3} + \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)^3} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^3} \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{(m-1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2} \right) \\ &\leq \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(m-1)^2} + \frac{1}{m^2} \right) \leq \frac{2}{n} \end{aligned}$$

das heisst wir müssen nur $n > \frac{2}{\varepsilon}$ wählen und aus dem Cauchy-Kriterium (Theorem 2.15) folgt die Konvergenz von (x_n) . In der letzten Ungleichung benutzen wir, dass für $k \geq 2$ stets gilt $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ und die Summe $\sum_{k=2}^m \frac{1}{k(k-1)} = 1 - \frac{1}{m}$, falls $m \geq 2$.

2.3 Summen und Produkte

Wir benutzen die Symbole $\sum$, $\prod$ um Summen und Produkte darzustellen. Seien dafür die reellen Zahlen a_k gegeben, wobei $m \leq k \leq n$ und $m \leq n$ zwei ganze Zahlen sind. Dann

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n a_k &= a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{n-1} + a_n, \\ \prod_{k=m}^n a_k &= a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n. \end{aligned}$$

Für den Fall, dass $m > n$ definieren wir formal die *leere Summe* (*leeres Produkt*)

$$\sum_{k=m}^n a_k := 0, \quad \prod_{k=m}^n a_k := 1.$$

Generell gelten einfache (natürliche) Rechenregeln wie zum Beispiel

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m}^{\tilde{m}} a_k + \sum_{k=\tilde{m}+1}^n a_k, \quad m \leq \tilde{m} \leq n,$$

$$\sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=m}^n b_k = \sum_{k=m}^n (a_k + b_k),$$

und die so genannte Indexverschiebung für ein beliebiges $\ell \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m+\ell}^{n+\ell} a_{k-\ell}.$$

2.4 Die vollständige Induktion

Nebem dem Widerspruchsbeweis ist das Prinzip der vollständigen Induktion [*raisonnement par récurrence*] eine wichtige Beweismethode. Zugrunde liegt das folgende Resultat.

Theorem 2.17 (Prinzip der vollständigen Induktion) *Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ und $A(n)$ eine Aussage, die für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ wahr oder falsch sein könnte (sinnvoll formuliert ist). Wir fordern, dass folgende zwei Bedingungen erfüllt sind*

- Die Aussage $A(n_0)$ ist wahr,
- Es gilt für alle $n \geq n_0$: Ist die Aussage $A(n)$ wahr, so ist auch die Aussage $A(n+1)$ wahr.

Dann ist $A(n)$ eine wahre Aussage für alle $n \geq n_0$.

Wenn wir diese Methode benutzen wollen, so müssen wir also folgende Schritte nachprüfen.

1. Induktionsanfang: Zeige das $A(n_0)$ eine wahre Aussage ist.

2. Induktionsschritt: Zeige, dass wenn wir $n \geq n_0$ festhalten und fordern dass $A(n)$ wahr ist (**Induktionsvoraussetzung**), dann folgt auch $A(n+1)$ ist eine wahre Aussage (**Induktionsbehauptung**).

Aus Theorem 2.17 folgt dann, dass $A(n)$ wahr ist für alle $n \geq n_0$, was manchmal auch der **Induktionsschluss** genannt wird.

Beispiel 2.18 Wir beweisen die **binomische Formel** [formula du binôme]

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen sind und für $n, k \in \mathbb{N}$ sei $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ der **Binomialkoeffizient** [coefficient binomial]. Sei also $A(n)$ die Aussage $(a+b)^n =$

$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ und für den Induktionsanfang prüfen wir den Fall $n = 0$. Also (beachte es ist $0! = 1$ definiert)

$$(a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0} a^0 b^0 = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^k b^{0-k},$$

daher stimmt $A(0)$. Im Induktionsschritt nehmen wir an es gilt $A(n)$, das heisst $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, für ein festes (aber nicht näher bestimmtes) $n \in \mathbb{N}$ (Induktionsvoraussetzung, IV). Dann gilt

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b) \cdot (a+b)^n \\ &\stackrel{IV}{=} (a+b) \cdot \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^{(k-1)+1} b^{n-(k-1)} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} b^0 + a^0 b^{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}. \end{aligned}$$

Das zeigt nun die Induktionsbehauptung und nach Theorem 2.17 folgt, dass die binomische Formel für alle $n \in \mathbb{N}$ gültig ist.

2.5 Die Euler'sche Zahl e

In diesem Unterabschnitt untersuchen wir zunächst die Zahl e , benannt nach dem Schweizer Mathematiker L. Euler (1707-1783). Diese Zahl kann **nicht** als Lösung einer algebraischen Gleichung (Polynom mit rationalen Koeffizienten = 0) definiert werden. Man sagt, sie ist **transzendent**. Eine Möglichkeit, e zu definieren, ist:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = 2.71828 \dots \quad (2.3)$$

Im Folgenden zeigen wir, dass diese Folge tatsächlich konvergent ist. Dazu werden wir die **binomische Formel** aus Beispiel 2.18

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad (2.4)$$

benutzen.

Theorem 2.19 Die Folge $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ist monoton wachsend und beschränkt, also konvergiert sie.

Beweis. Die Formel (2.4) ergibt für $a = 1$ und $b = 1/n$ die Beziehung

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)! k!} 1^{n-k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{n!}{(n-k)! n^k} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{n}{n} \cdot \frac{(n-1)}{n} \cdots \frac{(n-k+1)}{n} < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}. \end{aligned}$$

Nun können wir entweder sagen $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ für $k \geq 1$ und $\sum_{m=0}^n \frac{1}{2^m} \leq 2$, oder wir benutzen $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{k(k-1)}$ für $k \geq 3$, also

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \sum_{k=3}^n \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$$

durch eine Partialbruchzerlegung. In jedem Fall erhalten wir $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 3$ und die Folge (a_n) ist somit beschränkt.

Für den Nachweis der Monotonie bemühen wir noch einmal die binomische Formel:

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{n}{n} \cdot \frac{(n-1)}{n} \cdots \frac{(n-k+1)}{n} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{0}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \\ &\leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{0}{n+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \\ &\leq \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{0}{n+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) = a_{n+1}. \end{aligned}$$

Die Konvergenz folgt also aus dem Monotoniekriterium Theorem 2.7. $\square$

Die Folge (a_n) konvergiert extrem langsam gegen e ; probieren Sie diese einmal selbst auf dem Taschenrechner oder Computer aus!

2.6 Der Fall $\lim a_n = \infty$

Unter den *divergenten* Folgen zeichnen sich noch einige aus, von denen wir sagen, sie gehen gegen unendlich.

Definition 2.20 Gegeben sei eine (divergente) Folge (a_n) .

- (a_n) **geht gegen** ∞ , geschrieben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty,$$

wenn für jedes $M \in \mathbb{R}$ eine natürliche Zahl $N = N_M$ existiert, so dass $a_n \geq M$ für alle $n \geq N_M$ gilt.

- (a_n) **geht gegen** $-\infty$, geschrieben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty,$$

wenn für jedes $M \in \mathbb{R}$ eine natürliche Zahl $N = N_M$ existiert, so dass $a_n \leq -M$ für alle $n \geq N_M$ gilt.

Einige Beispiele:

- Die Folge (a_n) ; $a_n = (-1)^n \cdot n$ ist divergent, geht aber weder gegen $+\infty$ noch gegen $-\infty$.
- Die Folge (a_n) ; $a_n = n + \frac{1000}{n}$ ist divergent und nicht-monoton, geht jedoch gegen $+\infty$.
- Die Folge (a_n) ; $a_n = n + (-1)^n \cdot n$ ist divergent, geht aber weder gegen $+\infty$ noch gegen $-\infty$.
- Die Folge (a_n) ; $a_n = 2n + (-1)^n \cdot n$ ist divergent und nicht-monoton, geht jedoch gegen $+\infty$.

2.6.1 Rechenregeln

Es gelten fast alle vertraute Rechenregeln, zum Beispiel für zwei Folgen $(x_n), (y_n)$

- Wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ ($-\infty$) und (y_n) ist beschränkt, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = +\infty \text{ } (-\infty).$$

- Wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ ($-\infty$) und (y_n) ist so, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $y_n \geq x_n$ ($y_n \leq x_n$) für $n \geq N$, dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$ ($-\infty$).
- Wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ ($-\infty$) und (y_n) ist so, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ und $\alpha > 0$ gibt mit $y_n \geq \alpha$ für $n \geq N$, dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n = +\infty$ ($-\infty$). Genauso: Gibt es $\beta < 0$ mit $y_n \leq \beta$ für $n \geq N$, dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n = -\infty$ ($+\infty$).
- Wenn $x_n \geq \alpha > 0$ für $n \geq N$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ so, dass $y_n > 0$ für $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$. Genauso: Wenn $x_n \leq \beta < 0$ für $n \geq N$, dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = -\infty$.