

Kapitel 1

Reelle Zahlen

Die Zahlen $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, e, \dots$ lassen sich nicht als rationale Zahlen darstellen. Dies sieht man für $\sqrt{2}$ schnell ein.

Lemma 1.1 *Die Gleichung $x^2 = 2$ hat keine Lösung in $\mathbb{Q}$.*

Beweis. Der Beweis erfolgt per Widerspruch. Dazu wir nehmen an, dass die Behauptung falsch ist (Die Gleichung $x^2 = 2$ hat *eine* Lösung in $\mathbb{Q}$.) und führen dies zu einem Widerspruch.

Angenommen es gibt $x = p/q$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$ und $q \neq 0$, so dass $x^2 = 2$ gilt und p, q teilerfremd sind. Einsetzen und Multiplikation mit q^2 ergibt

$$p^2 = 2q^2. \quad (1.1)$$

Also ist p^2 eine gerade Zahl. Dann ist aber auch p selbst eine gerade Zahl. Also gibt es $r \in \mathbb{N}$ mit $p = 2r$. Einsetzen in (1.1) ergibt $q^2 = 2r^2$, also ist auch q^2 und damit q selbst eine gerade Zahl. Also ist 2 gemeinsamer Teiler von p und q . Dies steht aber im Widerspruch zur Annahme, dass p, q teilerfremd sind. $\square$

1.1 Die drei Axiome der reellen Zahlen

Um $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, e, \dots$ "einzufangen", muss die Menge der rationalen Zahlen auf die reellen Zahlen erweitert werden. Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen [*nombres réels*] kann mittels der folgenden drei Axiome definiert werden. Diese Axiome legen gewisse Regeln für die Addition $(x, y) \mapsto x + y$, die Multiplikation $(x, y) \mapsto x \cdot y$ und die Ordnungsrelation $x \leq y$ fest.

Axiom 1.* $\mathbb{R}$ ist ein Körper [*corps*], d.h., die folgenden Regeln gelten:

$$a) \quad (x + y) + z = x + (y + z) \text{ für alle } x, y, z \in \mathbb{R}; \quad (\text{Assoziativität+})$$

$$b) \quad x + y = y + x \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}; \quad (\text{Kommutativität+})$$

- c) es gibt eine Null $0 \in \mathbb{R}$, so dass $x + 0 = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$;
- d) für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert $-x \in \mathbb{R}$ so dass $x + (-x) = 0$; (Inverse+)
- e) $(xy)z = x(yz)$ für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$; (Assoziativität)
- f) $xy = yx$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$; (Kommutativität)
- g) es gibt eine Eins $1 \in \mathbb{R}$ mit $1 \neq 0$, so dass $1 \cdot x = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$;
- h) für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ existiert $x^{-1} \in \mathbb{R}$ so dass $x \cdot x^{-1} = 1$; (Inverse)
- i) $x(y + z) = xy + xz$ für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$; (Distributivität)

Aus Axiom 1 lassen sich leicht alle gewohnten Rechenregeln in $\mathbb{R}$ herleiten. Zum Beispiel fordert das Axiom zwar nicht explizit $0 \cdot x = 0$, dies folgt aber leicht aus

$$0 \cdot x \stackrel{c)}{=} (0 + 0) \cdot x \stackrel{i)}{=} 0 \cdot x + 0 \cdot x,$$

indem man $-(0 \cdot x)$ auf beide Seiten addiert. Im Wesentlichen sind dies aber nur wenig erhellende, mathematische Spielereien. Man sollte sich davon nicht beeindrucken lassen und wie gewohnt in $\mathbb{R}$ rechnen. Das wichtigste an diesem Konzept ist, dass es noch andere Körper gibt (insbesondere die komplexen Zahlen), in die diese Gewohnheiten übernommen werden können.

Axiom 2.* $\mathbb{R}$ ist ein geordneter Körper [corps ordonné], d.h. es gelten die folgenden Regeln für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$:

- a) aus $x \leq y$ und $y \leq z$ folgt $x \leq z$; (Transitivität)
- b) es gilt stets $x \leq y$ oder $y \leq x$;
aus $x \leq y$ und $y \leq x$ folgt $x = y$; (Trichotomie)
- c) aus $x \leq y$ folgt $x + z \leq y + z$; (Verträglichkeit mit Addition)
- d) aus $0 \leq x$ und $0 \leq y$ folgt $0 \leq xy$. (Verträglichkeit mit Multiplikation)

Um das dritte Axiom einzuführen, benötigen wir zunächst den Begriff des Supremums. Sei $S \subseteq \mathbb{R}$ Teilmenge [sous-ensemble] von $\mathbb{R}$. Dann heisst $M \in \mathbb{R}$ **obere Schranke** für S [un majorant de S] wenn $x \leq M$ für alle $x \in S$ gilt.

Es ist keineswegs klar, dass so eine obere Schranke immer existiert. Zum Beispiel lässt sich keine obere Schranke für die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ angeben. Sollte es aber eine obere Schranke geben, dann heisst S **nach oben beschränkt** [S est majoré].

Analog heisst S **nach unten beschränkt** [minoré] falls es eine **untere Schranke** [minorant] $m \in \mathbb{R}$ für S gibt, dass heisst, $m \leq x$ für alle $x \in S$. Weiter heisst S **beschränkt** [borné] falls S nach oben und unten beschränkt ist.

Für eine beschränkte Menge lassen sich sehr viele (nämlich unendlich viele) untere und obere Schranken in $\mathbb{R}$ finden. Wir zeichnen jetzt die Schranken aus, die am nächsten an S dran sind.

Definition 1.2 $M \in \mathbb{R}$ heisst **Supremum** [*borne supérieure*] von $S \subset \mathbb{R}$, wenn M die kleinste obere Schranke von S ist. $m \in \mathbb{R}$ heisst **Infimum** [*borne inférieure*] von $S \subset \mathbb{R}$, wenn m die grösste untere Schranke von S ist.

Für eine nach oben beschränkte Untermenge S existiert das Supremum und wird mit $\sup(S)$ bezeichnet. Sollte S nicht nach oben beschränkt sein, so schreibt man einfach $\sup(S) = \infty$. Analog wird das Infimum mit $\inf(S)$ bezeichnet, mit $\inf(S) = -\infty$ für eine nicht nach unten beschränkte Menge.

Nicht immer liegt das Supremum in S . Zum Beispiel ist 0 zwar das Supremum für

$$S = \{-1, -1/10, -1/100, -1/1000, \dots\},$$

liegt aber selbst nicht in S . (Bei den natürlichen Zahlen kann so etwas für eine nach oben beschränkte Menge nicht passieren.)

Axiom 3.* Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum in $\mathbb{R}$.

Aus Axiom 3 folgt sofort (Warum? Wir betrachten $\sup(-S) = \sup\{-x \mid x \in S\}$), dass jede nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ein Infimum in $\mathbb{R}$ besitzt.

Während Axiome 1 und 2 auch für rationale Zahlen gelten, ist dies nicht der Fall für Axiom 3. Als einfaches Beispiel betrachten wir die Dezimaldarstellung

$$\sqrt{2} = 1.41421356237309\dots$$

Wird die Dezimaldarstellung irgendwo abgeschnitten, so ergibt sich eine rationale Zahl. Also ist die Menge der derart abgeschnittenen Zahlen

$$S = \{1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, \dots\}.$$

eine Teilmenge von $\mathbb{Q}$. Sein Supremum $\sup(S) = \sqrt{2}$ liegt nach Lemma 1.1 aber nicht in $\mathbb{Q}$.

Axiome 1, 2, 3 legen die reellen Zahlen eindeutig fest. Alle gewohnten Rechenregeln und Gesetzmässigkeiten lassen sich aus diesen Axiomen herleiten. (Zum Glück studieren Sie nicht Mathematik und müssen dies nicht tatsächlich nachweisen.)

Bildlich kann man sich das Supremum (Infimum) aus Axiom 3 so vorstellen, dass das Supremum zwar ausserhalb von S liegen kann, sich zwischen S und dem Supremum aber keine andere Zahl “reinquetschen” kann. Der folgende Satz formalisiert diese Anschauung.

Satz 1.3 Sei $S \subseteq \mathbb{R}$ nicht leer. Dann gilt folgendes:

- (i) $M \in \mathbb{R}$ ist Supremum von S genau dann, wenn (a) M obere Schranke von S ist und (b) für jedes $\epsilon > 0$ es ein $x \in S$ mit $x \geq M - \epsilon$ gibt;
- (ii) $m \in \mathbb{R}$ ist Infimum von S genau dann, wenn (a) m untere Schranke von S ist und (b) für jedes $\epsilon > 0$ es ein $x \in S$ mit $x \leq m + \epsilon$ gibt;

Beweis. Wir beweisen nur (i). Sei M Supremum von S . Dann ist per Definition M auch obere Schranke; es gilt also (a). Würde (b) nicht gelten so gäbe es ein $\epsilon > 0$ für das es kein $x \in S$ mit $x \geq M - \epsilon$ gibt. Damit wäre aber $M - \epsilon$ eine obere Schranke, die kleiner als M ist; im Widerspruch zur Eigenschaft des Supremums. Für die andere Richtung nehmen wir an, dass (a) und (b) erfüllt seien und es ist zu zeigen, dass M Supremum von S ist. Wäre M kein Supremum (also nur eine obere Schranke) dann gäbe es eine kleinere obere Schranke $M_0 < M$ und insbesondere gäbe es für $\epsilon < M - M_0$ kein x mit $x \geq M - \epsilon$; im Widerspruch zu (b) $\square$

Zum Abschluss noch ein wenig Notation zu der Arbeit mit Intervallen. Für a, b mit $a < b$ bezeichnet man

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ als **abgeschlossenes Intervall** [*intervalle fermé*];
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ als **(rechtsseitig) halboffenes Intervall** [*intervalle fermé à gauche, ouvert à droite*];
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ als **(linksseitig) halboffenes Intervall** [*intervalle fermé à droite, ouvert à gauche*];
- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ als **offenes Intervall** [*intervalle ouvert*].

Intervalle sind die Prototypen von Untermengen in $\mathbb{R}$ und man sollte sich diese immer als erstes Beispiel vor Augen führen, wenn in dieser Vorlesung von Untermengen die Rede sein wird. Bei (halb)offenen Intervallen erlauben wir auch $a = -\infty$ bzw. $b = \infty$. Zum Beispiel: $] - \infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$

Ein offenes Intervall $]a, b[$ in $\mathbb{R}$ ist etwas ganz besonderes. Egal wie sehr man sich an a oder b annähert, es wird immer (unendlich viele!) Zahlen geben die noch weiter links bzw. rechts im Intervall liegen. Formaler lässt sich diese Tatsache wie folgt ausdrücken: Für jede Zahl $x \in]a, b[$ gibt es ein (allenfalls klitzekleines) $\delta > 0$, so dass $]x - \delta, x + \delta[\subset]a, b[$. Dies motiviert folgende Definition.

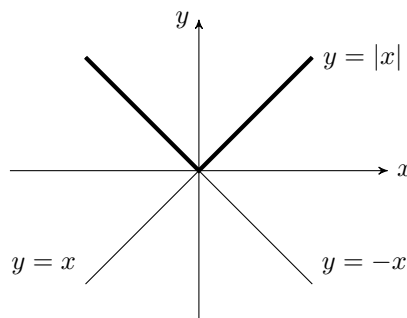
Definition 1.4 Sei $S \subset \mathbb{R}$ Untermenge von $\mathbb{R}$. Dann heisst S **offen** [*ouvert*] wenn es für jedes $x \in S$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $]x - \delta, x + \delta[\subset S$ gilt. S heisst **abgeschlossen** [*fermé*] wenn $\mathbb{R} \setminus S = \{x \in \mathbb{R} : x \notin S\}$ offen ist.

Die leere Menge $\emptyset$ ist per Definition immer offen. Auf der anderen Seite ist auch $\mathbb{R}$ offen. Damit sind $\emptyset$ und $\mathbb{R}$ sowohl offen als auch abgeschlossen. Dies ist ein wenig komisch; für diese 2 Spezialfälle macht Definition 1.4 offenbar nicht allzu viel Sinn.

1.2 Betrag

Der **Betrag** [*valeur absolue, module*] einer reellen Zahl x ist definiert als

$$|x| := \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0; \\ -x & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$



Der Betrag $|x|$ ist nie negativ. Er gibt den Abstand von x zur 0 wieder. Allgemeiner gibt $|x - y|$ den Abstand zwischen x und y auf der Zahlengeraden wieder. Der Betrag ist damit der Prototyp für die Definition eines sinnvollen Begriffs des Abstands für kompliziertere Objekte (komplexe Zahlen, Vektoren).

Die wichtigste Eigenschaft des Betrags ist die **Dreiecksungleichung**

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

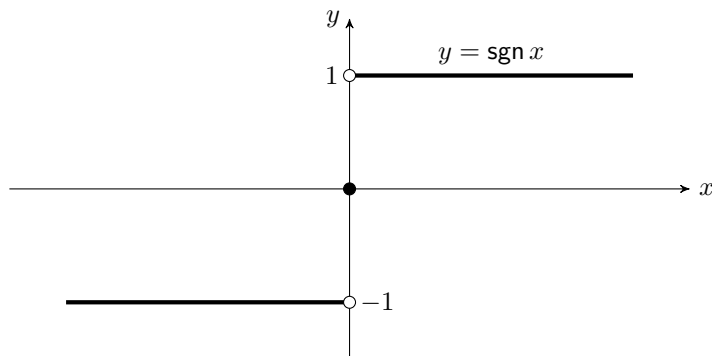
für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Davon kann man sich leicht überzeugen: Wenn x und y gleiches Vorzeichen haben, dann gilt Gleichheit. Wenn x und y verschiedenes Vorzeichen haben, dann ist $|x + y|$ kleiner als der grössere Betrag der beiden Zahlen.

Mit Hilfe des Betrags lassen sich bestimmte Ungleichungen kompakter schreiben. Zum Beispiel ist $|x| < \delta$ äquivalent zu $-\delta < x < \delta$. Die δ -Umgebung um a lässt sich damit auch schreiben als

$$B(a, \delta) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \delta\}.$$

Durch den Betrag verliert eine Zahl ihr Vorzeichen. Die **Signumsfunktion** [*fonction signe*, *signum*] enthält diese Information:

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0; \\ 0 & \text{für } x = 0; \\ -1 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$



Man sieht leicht

$$x = \operatorname{sgn}(x) \cdot |x|.$$

1.3 $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{R}_-^*$, $\mathbb{R}^*$, $\overline{\mathbb{R}}$

Mit $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ bezeichnet man die Menge der positiven reellen Zahlen [*nombres réels positifs*], mit $\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ die Menge der negativen reellen Zahlen [*nombres réels négatifs*]. Mit $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} = \mathbb{R}_+^* \cup \mathbb{R}_-^*$ wird die Menge der reellen von Null verschiedenen Zahlen bezeichnet. Für die nichtnegativen und nichtpositiven Zahlen schreibt man $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ bzw. $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$.

Nimmt man zu $\mathbb{R}$ noch formal $-\infty$ sowie $+\infty$ hinzu so erhält man die Menge der erweiterten reellen Zahlen [*la droite numérique achevée*]: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Die Ordnungsrelation wird entsprechend erweitert durch $-\infty < +\infty$ sowie $-\infty < x < +\infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Beim Rechnen mit erweiterten reellen Zahlen muss man ein wenig aufpassen. Zum Beispiel machen die Ausdrücke $(-\infty) + (+\infty)$ oder $0 \cdot (+\infty)$ keinen Sinn. Wir werden diese Menge in der Vorlesung kaum benutzen.