

(A1) Multiple Choice

Herbst/Winter '24

Prof. J. Krieger

T. Schmid

- a) Sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in einem Punkt $x_0 \in (0, 1)$. Dann gibt es eine Umgebung $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha) =: A$ um x_0 für ein $\alpha > 0$, so dass $A \subset (0, 1)$ und f stetig auf A ist.

☐ wahr

☐ falsch

- b) Sei $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in E$ so, dass $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ existiert. Dann ist f stetig in x_0 .

☐ wahr

☐ falsch

- c) Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$. Dann gilt:

☐ f ist injektiv und $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

☐ f ist surjektiv, stetig und $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$.

☐ f ist nicht injektiv und $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ existiert in $\mathbb{R}$.

☐ f ist stetig und $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}}$ existiert in $\mathbb{R}$.

- d) Betrachten Sie die Funktion $f : (1, 2] \rightarrow (-\infty, 0]$, $f(x) = (x - 1)^3 \log(x - 1)$. Dann gilt:

☐ f ist nicht stetig in $x = 2$.

☐ f ist stetig und weder injektiv noch surjektiv

☐ f ist stetig und surjektiv.

☐ f hat keinen Grenzwert in $x = 1$

- e) Betrachten Sie die Funktion $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ welche für ein $a \in \mathbb{R}$ und $b \in (0, 1]$ wie folgt definiert ist.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{|x|^b} & \text{für } x \in [-1, 0) \cup (0, 1], \\ a & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Dann gilt:

☐ f ist injektiv und nur stetig falls $a = 0$ und $b < 1$.

☐ f ist stetig für $a = 1$ wenn $b < 1$ sowie $a = 0, b = 1$.

☐ f ist injektiv aber für keine Werte von a, b stetig.

☐ f ist stetig für $a = 0$ wenn $b < 1$ oder $a = b = 1$.

(A2) Grenzwerte gegen Unendlich

Bestimmen Sie $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ für die Funktionen

a) $f(x) = 4x^7 - 18x^3 + 9$

d) $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 11}{3 - 6x^5}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x} + 12x - 2x^2$

e) $f(x) = \frac{x + 8}{\sqrt{2x^2 + 3}}$

c) $f(x) = \frac{8 - 4x^2}{9x^2 + 5x}$

f) $f(x) = \frac{8 + x - 4x^2}{\sqrt{6 + x^2 + 7x^4}}$

(A3) Stetigkeit mit Parameter

- a) Bestimmen Sie alle möglichen Werte für den Parameter $a \in \mathbb{R}$, so dass die folgende Funktion für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig ist.

$$f(x) = \begin{cases} a^2x - a, & x \geq 3 \\ 4, & x < 3 \end{cases}$$

- b) Bestimmen Sie alle möglichen Werte für das Parameter-Paar $(a, b) \in \mathbb{R}$, so dass die folgende Funktion für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig ist.

$$f(x) = \begin{cases} ax - b, & x \leq -1 \\ 2x^2 + 3ax + b, & -1 < x \leq 1 \\ 4, & x > 1 \end{cases}$$

- c) Bestimmen Sie alle möglichen Werte für das Parameter-Paar $(a, b) \in \mathbb{R}$, so dass die folgende Funktion für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig ist.

$$f(x) = \begin{cases} \sin(a\pi x), & x \leq 0 \\ \cos(\pi x + b\pi), & x > 0 \end{cases}$$

(A4) Stetige Fortsetzung

Sei $f : (\frac{1}{2}, 1) \cup (1, \frac{3}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$. Weiterhin sei $\hat{f}_1 : (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch:

$$\hat{f}_1(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in (\frac{1}{2}, 1) \cup (1, \frac{3}{2}), \\ a & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

Bestimmen Sie, falls möglich, $a \in \mathbb{R}$, so dass $\hat{f}_1(x)$ eine stetige Funktion auf $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ wird. Führen Sie dies für die folgenden Funktionen $f(x)$ durch

a) $f(x) = e^{-\frac{1}{|x-1|}}$

c) $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - x}$

b) $f(x) = (x - 1) \cos\left(\frac{1}{x - 1}\right)$

d) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{|x - 1|}}\right)$

Hinweis zu b): Substituieren Sie $y = x - 1$ und benutzen Sie das Kriterium der zwei Polizisten, um den Grenzwert für $y \rightarrow 0$ zu analysieren.

(A5) Einseitige Grenzwerte

Bestimmen Sie die folgenden einseitigen Grenzwerte (falls sie existieren).

a) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3} + \sqrt{x+3}}{\sqrt{x^2 - 9}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin(x))^{1/x}$