

(A1) Multiple Choice

Herbst/Winter '24

Prof. J. Krieger

T. Schmid

- a) Es gibt eine Funktion $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ mit $E \subset \mathbb{R}$ und die einen Grenzwert in $x_0 \in E$ hat, aber $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

☐ wahr

☐ falsch

- b) Sei $f : [-1, 0) \cup (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in jedem Punkt $x_0 \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ und beschränkt. Dann lässt sich f stetig im Punkt 0 fortsetzen.

☐ wahr

☐ falsch

- c) Sei $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$ stetig in jedem Punkt $x_0 \in (a, b)$ und bijektiv. Dann ist die Umkehrfunktion f^{-1} stetig in jedem Punkt $y_0 \in (c, d)$.

☐ wahr

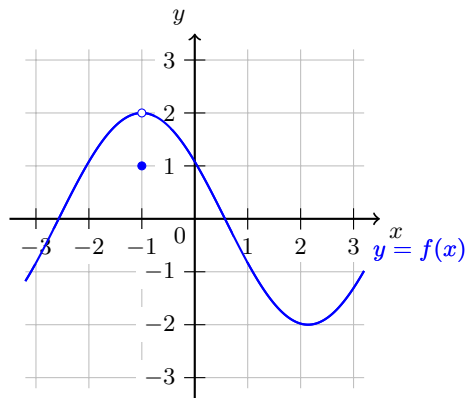
☐ falsch

- d) Sei $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ streng monoton wachsend und $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Dann ist f bijektiv.

☐ wahr

☐ falsch

- e) Bestimmen Sie mit Hilfe des Graphen das Verhalten der Funktion um den Punkt -1 . Hierbei bedeutet ein leerer Kreis an der Stelle x_0 eine Definitionslücke bei x_0 und ein gefüllter Kreis bei x_0 den Wert $f(x_0)$.



☐ $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ existiert nicht.

☐ $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$.

☐ $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$.

☐ $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$

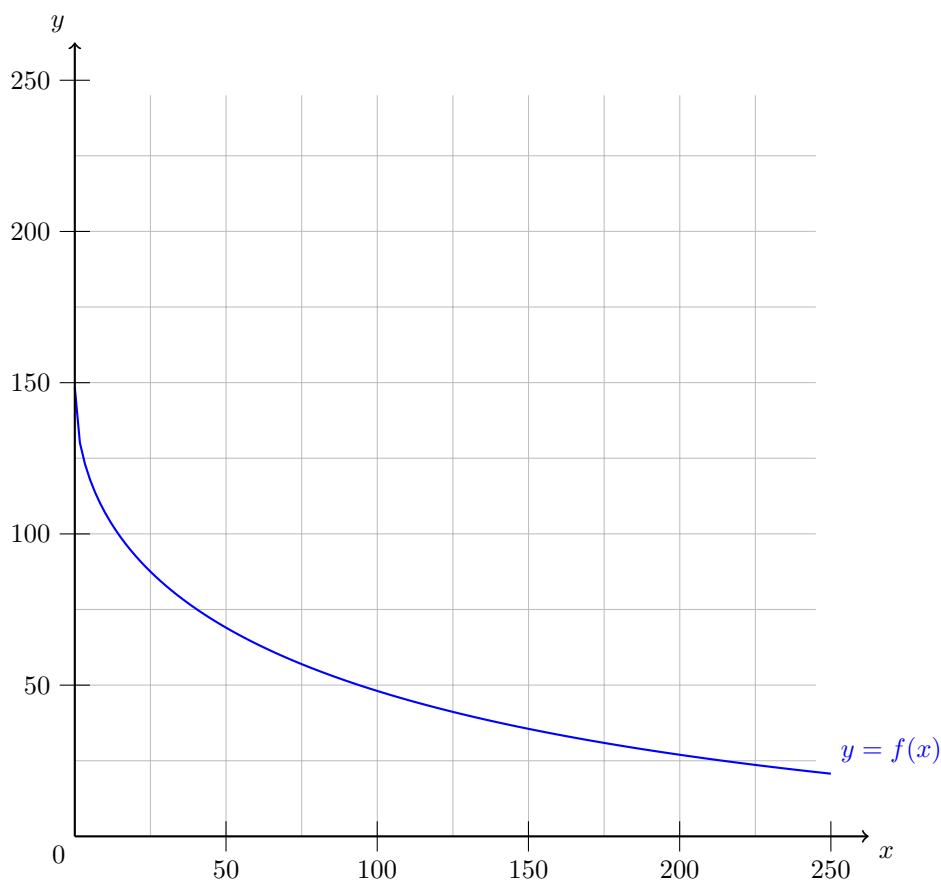
(A2) Definitionsbereich und Umkehrfunktion

Wir betrachten die Funktion

$$f : E \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^{\sqrt{25-\sqrt{x}}}$$

wobei $E \subset \mathbb{R}$

- Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich $E = D(f)$ und das dazugehörige Bild $f(E)$ von f .
- Argumentieren Sie, dass f eine Zusammensetzung von streng monotonen Funktionen und damit injektiv ist.
- Bestimmen Sie die Umkehrfunktion f^{-1} . Geben Sie ihren Definitionsbereich und das Bild an.
- Zeichnen Sie den Graph der Umkehrfunktion in die unten stehende Abbildung ein.



(A3) Der Logarithmus

- Schreiben mit Hilfe der Definitionen des Logarithmus aus der Vorlesung den Ausdruck

$$z = (-2 + i)^{5+6i}$$

in der Form $x + iy$.

- Betrachten Sie die Funktion

$$f : (1, 2] \rightarrow (-\infty, 0], \quad f(x) = \log(x - 1).$$

Prüfen Sie ob die Funktion nach oben/unten beschränkt, monoton wachsend oder fallend und ausserdem surjektiv oder injektiv ist.

(A4) Stetigkeit nachweisen anhand des ϵ, δ -Kriteriums

Seien die beiden Funktionen f und g wie folgt definiert.

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 7x - \frac{3}{2} \end{cases} \qquad g : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{cases}$$

Weisen Sie die Stetigkeit beider Funktionen in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ mit Hilfe des ϵ, δ -Kriteriums nach.

(A5) Stetigkeit widerlegen anhand des ϵ, δ -Kriteriums

Zeigen Sie, mit Hilfe des ϵ, δ -Kriteriums, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \geq \frac{1}{2} \\ x^3 & \text{für } x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

in $x_0 = \frac{1}{2}$ nicht stetig ist. Zeigen Sie dazu, dass sie für hinreichend kleine $\epsilon > 0$ kein entsprechendes $\delta > 0$ finden können.

(A6) Stetigkeit

a) Finden Sie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, so dass die reelle Funktion f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig wird.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -5 \\ \sqrt{x+a}, & -5 < x \leq -1 \\ 2x^2 + bx + 1, & -1 < x \leq 1 \\ cx + d, & 1 < x \leq 2 \\ 0, & 2 < x \end{cases}$$

Zeichnen Sie den Graph dieser Funktion auf dem Intervall $x = [-6, 3]$.