SERIE 2 – Analyse I (Allemand). Abgabe: 23.09.2024

EPFL

Herbst/Winter '24

Prof. J. Krieger

T. Schmid

Hinweis: Am nächsten Montag ist keine Übung, die Lösungen können (wie auch die der Serie 3) am Montag, dem 23.09.2024 zur Korrektur abgegeben werden.

(A1) Multiple Choice

a) Gegeben sei die Menge $\Omega \subset \mathbb{R}$ mit $\Omega =]2,5] \cup [3,10]$. Kreuze die richtigen Aussagen an.

- ◯ 2 ist Minimum von Ω.
- ◯ 2 ist eine untere Schranke von Ω.
- ◯ 2 ist Infimum von Ω.
- ◯ 5 ist ein Maximum von Ω.
- ◯ 10 ist Maximum von Ω.
- ◯ Ω ist beschränkt.
- ◯ Ω ist eine offene Menge.
- ◯ Ω ist eine geschlossene Menge.

b) Gegeben sei die Menge $\Omega \subset \mathbb{R}$ mit $\Omega = \left\{4 + \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$. Kreuze die richtigen Aussagen an.

- ◯ 10 ist obere Schranke für Ω.
- ◯ 5 ist Supremum von Ω.
- ◯ 4 ist Minimum von Ω.
- ◯ Ω ist nach unten beschränkt.

c) Gegeben sei die Menge $\Omega = [\pi, 4] \cap \mathbb{Q}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$. Dann gilt

- ◯ 4 ist Supremum aber kein Maximum von Ω
- ◯ π ist das Minimum von Ω
- ◯ 4 ist das Maximum von Ω
- ◯ π ist Infimum aber kein Minimum von Ω

d) Betrachte die nichtleere Menge $A \subset \mathbb{R}$. Wir erinnern daran, dass $\operatorname{Sup} A = \infty$ ($\operatorname{Inf} A = -\infty$) gilt wenn A nicht nach oben (unten) beschränkt ist. In diesem Fall ist $\operatorname{Sup} A$ (bzw. $\operatorname{Inf} A$) kein Element von A.

- Wenn $\operatorname{Sup} A \in A$ und $\operatorname{Inf} A \in A$, dann ist A beschränkt.

  ◯ wahr ◯ falsch

- Wenn $\operatorname{Sup} A \in A$ und $\operatorname{Inf} A \in A$, dann ist A abgeschlossen.

  ◯ wahr ◯ falsch

- Wenn $\operatorname{Sup} A \notin A$ und $\operatorname{Inf} A \notin A$, dann ist A offen.

  ◯ wahr ◯ falsch

- Wenn A offen ist, dann ist $\operatorname{Inf} A \notin A$ und $\operatorname{Sup} A \notin A$.

  ◯ wahr ◯ falsch

- Wenn A abgeschlossen und beschränkt ist, dann ist $\operatorname{Inf} A \in A$ und $\operatorname{Sup} A \in A$.

  ◯ wahr ◯ falsch

(A2) Infimum und Supremum

Bestimmen Sie für die Menge Ω das Infimum, Supremum, Maximum und Minimum, falls sie existieren.

a) $\Omega = [1, 50[$

b) $\Omega =]1, \infty[$

c) $\Omega =]3, 5] \cup [3, 10]$

d) $\Omega = [-10, 5] \cap]2, 10]$

e) $\Omega = \{ p^{-1} \mid p \text{ ist Primzahl} \}$

f) $\Omega = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots \right\}$

g) $\Omega = \{x \in \mathbb{R} \mid x + x^2 < 6\}$

h) $\Omega = \{\sin(x) \mid x \in \mathbb{R},\, 0 \leq x < \pi/2\}$

(A3) Etwas zum Betrag ...

Zeigen Sie, dass für zwei reelle Zahlen x, y gilt:

a) $|xy| = |x||y|$

b) $|x + y| \leq |x| + |y|$ *(Dreiecksungleichung)*

c) $||a| - |b|| \leq |a - b|$

d) $\min(x, y) = \frac{x+y-|y-x|}{2}$

e) $\max(x, y) = \frac{x+y+|y-x|}{2}$

Hierbei ist sind die Minimums- und Maximumsfunktion definiert durch:

$$\min(x,y) = \begin{cases} x & \text{falls } x \leq y \\ y & \text{falls } x > y \end{cases}, \qquad \max(x,y) = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq y \\ y & \text{falls } x < y \end{cases}.$$

Tipp: Fallunterscheidungen, Quadrieren.

(A4) Definition der Konvergenz

In der Vorlesung wurde Konvergenz wie folgt definiert:

> Eine Folge (x_n) **konvergiert** gegen $x_\infty \in \mathbb{R}$ wenn für jedes (noch so kleine) $\varepsilon > 0$ ein $N = N_\varepsilon$ existiert so dass
>
> $$|x_\infty - x_n| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$
>
> Wir nennen x_∞ **Grenzwert** von (x_n) und schreiben $x_\infty = \lim_{n\to\infty} x_n$ oder auch $x_n \overset{n\to\infty}{\to} x_\infty$.

Zeigen Sie mit Hilfe dieser Definition (ohne andere Kriterien zu nutzen), dass die Folge $x_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ für $n \in \mathbb{N}, n \to \infty$ gegen 0 konvergiert. *Hinweis: Geben Sie sich zunächst ein festes ε vor, z.B. $\varepsilon = 0.1$. Finden Sie heraus, wie sie N wählen müssen, so dass*

$$|0 - x_n| \leq \varepsilon \quad \textit{für alle } n \geq N.$$

Verallgemeinern Sie das Kriterium für die Wahl von N für allgemeines ε.

(A5) Grenzwerte

Bestimmen Sie die Grenzwerte dieser Folgen für $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, n \to \infty$:

a) $x_n = \dfrac{4n^2 + 2n - 5}{n(n - 7)}$

b) $x_n = \dfrac{-9n^4 + n - 7}{n^2(2n^3 - n^2 - 2n - 3)}$

c) $x_n = \dfrac{\sqrt{n^4 + 4n^3 + 6}}{2n^2 - 1}$ *(Tipp: Schreiben Sie den Nenner als Wurzel um)*

d) $x_n = \sqrt{8n^2 + n + 4} - 2\sqrt{2n^2 - 1}$ *(Tipp: Erweitern)*

e) $x_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$ mit $n \geq 2$ *(Tipp: Schreiben Sie das Produkt aus)*