

(A1) Intervalle und Boolesche Operationen

Intervalle kennen Sie vermutlich bereits aus der Kantonsschule. Hier eine kurze Wiederholung der wichtigsten Booleschen Operationen (Mengenoperationen):

Gegeben vier Mengen A, B, C, D mit $A \subset D$ definieren wir wie folgt:

Symbol	Name	Definition
$A \cup B$	Vereinigung	$\{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$
$A \cap B$	Schnitt	$\{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$
$A \setminus B$	Differenz ("A ohne B")	$\{x \mid x \in A \text{ aber } x \notin B\}$
A^c	Komplement von A in D	$\{x \mid x \in D \text{ aber } x \notin A\}$

Es gelten folgende elementare Rechenregeln:

Kommutativität	$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$
Assoziativität	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C,$ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
Distributivität	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
De Morgansche Gesetze	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c, \quad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Vereinfachen Sie nun die folgenden Mengen soweit wie möglich.

a) $([-4, -2] \cup [-1, 1] \cup [2, 4]) \cap]-2, 0[$

b) $]0, 2[)^c \cap [-1, 1]$

c) $] -\infty, 1] \cup]2, +\infty[)^c$

d) $([0, 2]^c \cap [1, 3])^c \cap [0, +\infty[$

Beispiel:

$$[-1, 1] \cup ([0, 2[\cap [-1, 2]) = [-1, 2[$$

(A2) Gleichungen

Bestimmen Sie durch Umformung welche der nachfolgenden Gleichungen wahr und welche falsch sind. Die Definitionsbereiche der reellen Variablen a, b, c, d sind jeweils so gewählt, dass die Ausdrücke wohldefiniert sind.

a) $(a + b)^2 = a^2 + b^2$

e) $(bc + 1)\frac{a}{b} = \frac{(bc+1)ad}{bd}$

b) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

f) $\frac{1}{a-b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$

c) $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$

g) $\frac{\frac{1}{c}}{\frac{a}{c} + \frac{b}{c}} = \frac{1}{b-c}$

d) $\frac{1+ab}{b} = 1 + b$

h) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

(A3) Ungleichungen

Lösen Sie folgende Ungleichungen für die reelle Zahl x auf:

a) $4 - x < 2 + 3x$

e) $\frac{3x-1}{x+2} \leq \frac{x}{x+2} < \frac{x+1}{x+2}$

b) $(x-1)(x-5) \geq 0$

f) $|x+3| > 2$

c) $x^2 - 4x + 4 > 0$

g) $|2x-1| < 3$

d) $\frac{x-5}{x+3} \geq 0$

h) $|x-1| \leq |x+1|$

i) $1 < |x+5| < 8$

Tipp: Fallunterscheidungen, Quadrieren.

(A4) Rechenregeln

Für welche der folgenden Ausdrücke gilt Gleichheit zu $a^p b^q$ wobei stets $a, b > 0$ und $p, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$?

1. $(ab)^p b^{q-p}$

8. $\sqrt{a^{2p}} b^q$

2. $a^{p-q} (ab)^q$

9. $\left(\left(\frac{1}{a} \right)^q + \left(\frac{1}{b} \right)^p \right) \frac{a^p (ab)^q}{1 + \frac{a^q}{b^p}}$

3. $\frac{a^p}{b^{-q}}$

10. $a^q b^p \frac{\frac{a^p + b^q}{\left(\frac{1}{a} \right)^p + \left(\frac{1}{b} \right)^q}}{\left(\frac{1}{b} \right)^p + \left(\frac{1}{a} \right)^q}$

5. $\left(ab^{\frac{q}{p}} \right)^p$

11. $a^{p-q} b^{q-p} (a^q + b^p) \left(\left(\frac{1}{a} \right)^q + \left(\frac{1}{b} \right)^p \right)^{-1}$

6. $\left(a^{\frac{p}{q}} b \right)^q$

12. $a^q b^p \left(\left(a^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} b^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \right)^p \right)^q$

7. $\left(a^{\frac{1}{q}} b^{\frac{1}{p}} \right)^{pq}$

13. $\left(\sqrt{a^p (b^q + a^{-p})} - 1 \right) \left(\sqrt{b^q (a^p + b^{-q})} + 1 \right)$