Serie 14 – Analyse I (Allemand). Abgabe: keine

Herbst/Winter '24

Prof. J. Krieger

T. Schmid

Dies ist eine Zusatzserie die nicht in den Übungsgruppen besprochen wird. Die Musterlösung gibt es wie gewohnt auf Moodle.

(A1) Anwendungsbeispiel Integralrechnung

a) Rosi hat sich eine kleine Vase gekauft und möchte wissen wie viel Wasser sie hineinfüllen kann. Das Modell für die Vase ist der Körper, der entsteht wenn man den Graph der Funktion (in Dezimetern)

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\exp(-4x) & \text{für } x \in [0, \frac{3}{4}], \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\exp(-3) & \text{für } x \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

in Richtung einer dritten unabhängigen Achse rotiert. Wieviele Liter passen in die Vase, wenn sie bis zu einer Höhe von 0.75 Dezimeter (dm) gefüllt wird? (1 $\text{dm}^3 \;\hat{=}\; 1$ l).

Fassen Sie dabei das Volumen als Integral über die Flächeninhalte der kreisförmigen Schnittflächen der Vase auf. Diese Kreise haben am Mittelpunkt x den Radius $f(x)$.

b) Passend zur Vase möchte Rosi eine blumenförmige Unterlage basteln. Sie hat dazu bereits aus Stoff die folgende Kurve $\gamma(t)$ ausgeschnitten:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 9\cos(t) + \cos(9t) \\ 9\sin(t) + \sin(9t) \end{pmatrix},\ t \in [0, 2\pi].$$

Um ein Ausfransen der Schnittkante zu vermeiden, möchte sie diese blumenförmige Unterlage nun mit einem Band einfassen, hat aber nur noch ein ein Meter langes Stück zu Hause. Reicht ihr dies?

Berechnen Sie also die Bogenlänge der durch $\gamma(t)$ gegebenen Kurve. Auch hier sind die Zahlenwerte in Dezimeter angegeben. Benutzen Sie für die Länge die Formel

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

Tipp Zum berechnen von $\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos(8t)}\,\mathrm{d}t$ ist die Identität $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$ nützlich. Beachten Sie aber, dass $\sqrt{\cos^2(t)} = |\cos(t)|$. Es lässt sich also nur stückweise eine Stammfunktion angeben. Teilen Sie das Integral also entsprechend auf.

(A2) Gemischte Aufgaben

Bestimmen Sie die folgenden Stammfunktionen. Entscheiden Sie dabei selbst, welche Herangehensweise am sinnvollsten ist.

a) $\displaystyle\int e^{-x}\cos(5x)\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int 2\sqrt{4-x^2}\ \mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^{\log(3)} 8\cosh^2(x)\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sinh(x)\cosh(x)}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+4x+8}\,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int \frac{t^2}{\sqrt{1-5t^3}}\,\mathrm{d}t$

g) $\displaystyle\int \sin^4(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x$

h) $\displaystyle\int \frac{\sin(t)\cos(t)}{1+\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t$

i) $\displaystyle\int (x^2+2x)\sinh\left(\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x$

(A3) Gemischte Aufgaben II

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte. Entscheiden Sie dabei selbst, welche Herangehensweise am sinnvollsten ist.

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)}{x^2}$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(4x)}{x}$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{\exp(2x)-1}{\sin(x)}$

e) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\exp(3x)-1}$

f) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\arctan(4x)}$

g) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1+\frac{1}{2}x^2}{x^4}$

h) $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)-x}{\sin(x)-x}$

i) $\lim_{x\to \pi} \frac{1+\cos(x)}{(x-\pi)^2}$

j) $\lim_{x\to 1} \frac{\log(x)}{(\sqrt{x}-1)}$

Tipp: Mit der Taylorentwicklung lassen sich all diese Grenzwerte bestimmen.

(A4) Integration durch Substitution

Berechnen Sie das Integral $\int_{1/8}^{1/3} \sqrt{\frac{x+1}{x}}\,\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ durch Substitution mit der neuen Variable $u = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$.