

(A1) Multiple Choice

Herbst/Winter '24

Prof. J. Krieger

T. Schmid

- a) Betrachten Sie eine beliebige Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(0) = 1$ und $f(1) = 3$. Ist dann die folgende Aussage richtig? Für jede reelle Zahl y mit $1 \leq y \leq 3$ existiert $x \in [0, 1]$ mit $y = f(x)$.

☐ wahr

☐ falsch

- b) Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$$

ist im Punkt $x_0 = 0$ differenzierbar.

☐ wahr

☐ falsch

- c) Gegeben seien die Landau Symbole wie in der Vorlesung.

- Seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen.

– Wenn $f(c) = o(h)$, dann gilt auch $f(h) = O(h)$ für $h \rightarrow 0$.

☐ wahr ☐ falsch

– Wenn $f(h) = O(h)$, dann gilt auch $f(h) = o(h)$ für $h \rightarrow 0$.

☐ wahr ☐ falsch

– Seien p und q reelle Zahlen mit $p, q > 0$. Wenn $p < q$, $f(h) = o(h^p)$ und $g(h) = o(h^q)$, dann gilt $f(h) + g(h) = o(h^p)$ für $h \rightarrow 0$.

☐ wahr ☐ falsch

- Die Funktion $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x^5 + x^4 - x^2 - x}{x^2 - 1}$ erfüllt $f(x) = O(x^2)$ für $x \rightarrow 0$.

☐ wahr ☐ falsch

- d) Jede stetige Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ist für jeden Punkt aus dem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ differenzierbar.

☐ wahr

☐ falsch

- e) Jede stetige und strikt monotone Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ist für jeden Punkt aus dem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ differenzierbar.

☐ wahr

☐ falsch

- f) Sei I ein offenes Intervall. Es gibt eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ die auf I stetig aber nirgendwo in I differenzierbar ist.

☐ wahr

☐ falsch

- g) Betrachten Sie die zwei Funktionen $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$ und $g(x) = x$. Dann folgt aus

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - \sin(x)}{1} = 1,$$

dass

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) + \cos(x)}{x} = 1.$$

☐ wahr

☐ falsch

h) Seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = x^4, \quad g(x) = x^5.$$

Dann existiert ein $c \in]-1, 1[$, so dass

$$\frac{f(1) - f(-1)}{g(1) - g(-1)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

☐ wahr

☐ falsch

i) Sei f eine stetige Funktion auf $[a, b]$ und differenzierbar auf $]a, b[$.

- Wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in]a, b[$, dann ist f monoton steigend auf $[a, b]$.

☐ wahr ☐ falsch

- Wenn f monoton steigend auf $[a, b]$, dann ist $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in]a, b[$.

☐ wahr ☐ falsch

- Wenn f strikt monoton steigend auf $[a, b]$, dann ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in]a, b[$.

☐ wahr ☐ falsch

- Wenn $f'(x) > 0$ für alle $x \in]a, b[$, dann ist f strikt monoton steigend auf $[a, b]$.

☐ wahr ☐ falsch

Seien f, g differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

- Wenn $f(a) = g(a) = 0$ für $a \in \mathbb{R}$, dann gilt $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$.

☐ wahr ☐ falsch

- Wenn $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ nicht existiert, dann existiert auch $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ nicht.

☐ wahr ☐ falsch

(A2) Produktregel

a) Seien $f, g, h : E \rightarrow \mathbb{R}$ drei in $x_0 \in E$ differenzierbare Funktionen, wobei $E \subset \mathbb{R}$ eine offene Teilmenge ist. Es kann dann gezeigt werden, dass $f \cdot g \cdot h$ ebenfalls in x_0 differenzierbar ist. Finden Sie nun eine Darstellung von $(f \cdot g \cdot h)'(x_0)$ mittels $f(x_0), g(x_0), h(x_0)$ und $f'(x_0), g'(x_0), h'(x_0)$.

b) Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ beliebig. Betrachten Sie n Funktionen

$$f_k : E \rightarrow \mathbb{R}, k = 1, \dots, n,$$

welche in $x_0 \in E$ differenzierbar sind, wobei $E \subset \mathbb{R}$ eine offene Teilmenge ist. Es kann dann gezeigt werden, dass dann $f_1 \cdot f_2 \cdots f_n$ ebenfalls differenzierbar ist in x_0 . Beweisen Sie folgende Darstellung mittels vollständiger Induktion

$$(f_1 \cdot f_2 \cdots f_n)'(x_0) = \sum_{k=1}^n f_1(x_0) \cdots f_{k-1}(x_0) \cdot f'_k(x_0) \cdot f_{k+1}(x_0) \cdots f_n(x_0).$$

(A3) Extremwerte

a) Bestimmen Sie die Extremstellen der Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = x^3 + 5x^2 + 3x + 6.$$

b) Untersuchen Sie die Funktion $f : [-5, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \sqrt{|x^2 - 2x|}$$

auf: Nullstellen, Stetigkeit, Differenzierbarkeit, lokale und globale Extrema.

c) Eine Firma lässt Kisten mit folgenden Spezifikationen herstellen: Die Kisten sollten länger als breit sein, die Summe der Breite und der halben Länge darf nicht mehr als 8 m sein und die Höhe darf höchstens 60 cm betragen.

Wie müssen die Dimensionen (Höhe, Breite, Länge) gewählt werden, damit der Inhalt der Kiste maximal wird?

(A4) Grenzwerte von Funktionen

Benutzen Sie die Regel von l'Hôpital, um folgende Grenzwerte zu berechnen. Denken Sie daran, stets zu überprüfen, ob die Bedingungen des Satzes erfüllt sind!

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \exp\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\log(x+1)}\right)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{1 - \cos(x)}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \arctan(x))^{\frac{1}{x}}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)}{\sqrt{1-x}}$

Hinweis zu d): $\lim_{x \rightarrow 0} \exp(f(x)) = \exp(\lim_{x \rightarrow 0} f(x))$ wenn $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existiert.

(A5) Grenzwerte von Funktionen, für die die Regel von L'Hôpital nicht anwendbar ist

In den folgenden zwei Fällen lässt sich der Grenzwert nicht mit Hilfe der Regel von L'Hôpital berechnen. Begründen Sie, wieso die Regel von L'Hôpital nicht zur Berechnung des Grenzwertes dient, und berechnen Sie die Grenzwerte.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(\frac{1}{x})}{x + \sin(x)}$

(A6) Taylorpolynome

Gegeben sei die Funktion

$$f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(2\pi x) + x.$$

Seien $p_1(x_i, x)$ für $i = 0, \dots, 3$ die Taylorpolynome erster Ordnung von f in den jeweiligen Punkten $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$ und $x_3 = \frac{3}{2}$. Sei $P(x)$ eine abschnittsweise definierte Funktion:

$$P(x) = \begin{cases} p_1(x_0, x) & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ p_1(x_1, x) & x \in [\frac{1}{2}, 1) \\ p_1(x_2, x) & x \in [1, \frac{3}{2}) \\ p_1(x_3, x) & x \in [\frac{3}{2}, 2] \end{cases}$$

1) Bestimmen Sie die Polynome $p_1(x_i, x)$ für $i = 0, \dots, 3$.

2) Ist die Funktion P im Intervall $[0, 2]$ stetig? Falls nicht, geben Sie die Sprungstellen von P an.

3) Zeigen Sie, dass $|f(x) - P(x)| \leq \frac{\pi^2}{2}$ für alle $x \in [0, 2]$ gilt.