



Prof. D. Kressner - Analysis I - (n/a)



14 Januar 2019 - Dauer: 3 Stunden

n/a

n/a

SCIPER : 999999

Drehen Sie diese Seite nicht um, bevor Sie dazu aufgefordert werden. Jedes Blatt hat eine Vorder- und eine Rückseite. Es gibt 12 Seiten, die letzten sind möglicherweise leer. Lösen Sie nicht die Heftklammern.

- Legen Sie Ihren Studentenausweis auf den Tisch.
- Es sind **keine** weiteren Unterlagen zugelassen.
- Die Nutzung eines **Taschenrechners** oder jedes anderen elektronischen Hilfsmittels ist während der Prüfung nicht gestattet.
- Für die **Multiple Choice** Fragen erhält man:
 - +3 Punkte, wenn die Antwort richtig ist,
 - 0 Punkte, wenn die Frage nicht beantwortet ist oder mehrere Möglichkeiten markiert sind,
 - 1 Punkt, wenn die Antwort falsch ist.
- Für die **Wahr/Falsch** Fragen erhält man:
 - +1 Punkt, wenn die Antwort richtig ist,
 - 0 Punkte, wenn die Frage nicht beantwortet ist oder mehrere Möglichkeiten markiert sind,
 - 1 Punkt, wenn die Antwort falsch ist.
- Benutzen Sie einen **Kugelschreiber mit schwarzer oder blauer Tinte** und verwenden Sie Korrekturflüssigkeit (z.B. Tipp-Ex) um bei Bedarf Ihre Antwort zu ändern.
- Falls eine Fragestellung einen Fehler enthält, darf der/die Unterrichtende die entsprechende Frage annullieren.

Respectez les consignes suivantes Observe this guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren
  		 
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte		
     		



Erster Teil, Multiple-Choice-Fragen

Markieren Sie bitte für jede Frage die Box an, die zu der richtigen Lösung gehört. Es gibt **genau eine** richtige Antwort pro Frage.

Frage 1 : Betrachte die Folge $(x_n)_{n \geq 1}$ definiert durch $x_n = \sqrt[n]{7}$ für gerade n und $x_n = \frac{1}{n^7}$ für ungerade n . Dann gilt:

☐ $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ und $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

☐ $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$

☐ $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

☐ $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ und $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$

Frage 2 : Sei die Folge $(u_n)_{n \geq 0}$ definiert durch $u_0 = 0$ und, für $n \geq 0$, $u_{n+1} = \frac{1+2u_n}{2+u_n}$. Dann gilt:

☐ $(u_n)_{n \geq 0}$ ist monoton fallend

☐ $0 < u_n \leq 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}^*$

☐ $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$

☐ $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{1}{2}$

Frage 3 : Betrachte die Folge $(x_n)_{n \geq 1}$ definiert durch $x_n = \frac{2^{2n}}{(7n)!}$. Für $n \rightarrow \infty$,

☐ divergiert diese Folge

☐ konvergiert diese Folge gegen 0

☐ konvergiert diese Folge gegen $\frac{4}{7}$

☐ konvergiert diese Folge gegen $\frac{\text{Log}(2)}{7}$

Frage 4 : Betrachte die Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ definiert durch $a_0 = \frac{3}{2}$ und, für $n \geq 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{8a_n - 7}$. Dann gilt:

☐ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

☐ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$

☐ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$

☐ Die Folge divergiert.

Frage 5 : Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x |\cos(x)|$. Dann gilt:

☐ f ist stetig auf $\mathbb{R}$, aber f ist nicht differenzierbar an der Stelle $x = 0$

☐ f ist nicht zwei Mal stetig differenzierbar an der Stelle $x = 0$

☐ f ist unendlich oft differenzierbar auf $\mathbb{R}$

☐ f ist differenzierbar an der Stelle $x = 0$, aber nicht an der Stelle $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Frage 6 :

Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \frac{4}{2+3x}$. Dann ist die Taylor-Reihe von f um $x_0 = 2$ wie folgt:

☐ $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{8}\right)^k (x-2)^k$ pour $x \in]-\frac{2}{3}, \frac{14}{3}[$

☐ $f(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{8}\right)^k (x+2)^k$ pour $x \in]-\frac{14}{3}, \frac{2}{3}[$

☐ $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{8}\right)^k (x-2)^k$ pour $x \in]1, 3[$

☐ $f(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{8}\right)^k (x-2)^k$ pour $x \in]-\frac{2}{3}, \frac{14}{3}[$



Frage 7 : Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = e^{\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}}$. Dann gilt:

- | | |
|--|--|
| ☐ f besitzt genau ein lokales Maximum in $\mathbb{R}$ | ☐ f ist streng monoton fallend auf $\mathbb{R}$ |
| ☐ f ist streng monoton steigend auf $\mathbb{R}$ | ☐ f besitzt genau ein lokales Minimum in $\mathbb{R}$ |

Frage 8 : Betrachte für $p \in \mathbb{R}$ die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} |x|^p \operatorname{Log} |x|, & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Dann gilt:

- ☐ Für $p = \frac{1}{2}$ ist f unstetig an der Stelle $x = 0$.
- ☐ Für $p = \frac{2}{3}$ ist f rechtsseitig stetig aber nicht linksseitig stetig an der Stelle $x = 0$.
- ☐ Für $p = \frac{3}{2}$ ist f nicht differenzierbar an der Stelle $x = 0$.
- ☐ Für $p = \frac{6}{5}$ ist f differenzierbar an der Stelle $x = 0$.

Frage 9 : Seien A und B zwei beschränkte nichtleere Untermengen von $\mathbb{R}$ und sei $C \subset \mathbb{R}$ die wie folgt definierte Menge:

$$C = \{x - y : x \in A, y \in B\}.$$

Dann gilt:

- | | |
|---|---|
| ☐ $\sup C = \sup A - \inf B$ | ☐ $\sup C = \sup A - \sup B$ |
| ☐ $\sup C < \sup A$ | ☐ $\sup C > \inf A$ |

Frage 10 : Das Taylor-Polynom der Ordnung 4 von $f(x) = \frac{1}{1 - \sin(x)}$ um $x_0 = 0$ ist

- | | |
|---|---|
| ☐ $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ | ☐ $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^4$ |
| ☐ $1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4$ | ☐ $1 + x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{2}{3}x^4$ |

Frage 11 : Für $m \in \mathbb{R}$ betrachtet man die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2(x)}{\operatorname{Log}(1 + 2x^2)} & \text{für } x < 0, \\ m & \text{si } x = 0, \\ \frac{x + 1}{x^2 + 3x + 1} & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Dann gilt:

- ☐ Für $m = \frac{1}{2}$ ist f stetig an der Stelle $x = 0$.
- ☐ Für $m = \frac{1}{3}$ ist f rechtsseitig stetig aber nicht linksseitig stetig an der Stelle $x = 0$.
- ☐ Für $m = \frac{1}{2}$ ist f linksseitig stetig aber nicht rechtsseitig stetig an der Stelle $x = 0$.
- ☐ Für $m = 1$ ist f stetig an der Stelle $x = 0$.



Frage 12 : Das uneigentliche Integral $I = \int_{0^+}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}} dx$

- ☐ divergiert weil $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \text{Log}(\sqrt{\sin(\varepsilon)}) = -\infty$
- ☐ konvergiert und es gilt $I = \sqrt{2}$
- ☐ divergiert weil $\frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}$ in $x = 0$ nicht definiert ist
- ☐ konvergiert und es gilt $I = \frac{1}{2} \text{Log}(\frac{1}{2})$

Frage 13 : Für einen reellen Parameter s betrachte man die Folge $(b_n)_{n \geq 1}$ definiert durch $b_n = \frac{1}{n^s}$ für n gerade, $b_n = \frac{1}{n^{2s}}$ für n ungerade. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ genau dann wenn

- ☐ $s > 2$ ☐ $s > 0$ ☐ $s > 1$ ☐ $s > \frac{1}{2}$

Frage 14 : Betrachte die Funktion $f :]-3, 2[\rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^2 + 4x - 1$. Dann gelten für alle $x \in]-3, 2[$ und $y \in]-3, 2[$, mit $x \neq y$, die folgende Ungleichungen:

- ☐ $-4 \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq 6$ ☐ $-1 \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq 9$
- ☐ $-2 \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq 8$ ☐ $-3 \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq 7$

Frage 15 : Betrachte das Integral $I = \int_2^3 \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1} dx$. Dann gilt:

- ☐ $I = \text{Log}(2) + \frac{1}{2}$ ☐ $I = \frac{4}{3} - 4 \text{Log}(\frac{4}{3})$
- ☐ $I = \frac{5}{3} - 4 \text{Log}(\frac{3}{2})$ ☐ $I = 2 \text{Log}(2) + 1$

Frage 16 : Sei $\lambda = -\frac{1}{6}$. Man bestimme unter den folgenden Reihen diejenige welche konvergiert:

- ☐ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\lambda}}$ ☐ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\lambda^n}$ ☐ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-\lambda^2}\right)^n$ ☐ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right)^n$

Frage 17 : Betrachte das Integral $I = \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx$. Dann gilt:

- ☐ $I = 2(\text{Arctg}(\sqrt{3}) - \frac{\pi}{4})$ ☐ $I = 2(\sqrt{3} - 1) + \text{Log}(2)$
- ☐ $I = \sqrt{3} - 1 + \text{Log}(2)$ ☐ $I = \frac{1}{2}(\text{Arctg}(3) - \frac{\pi}{4})$

Frage 18 : Sei $S \subset \mathbb{C}$ die Menge der Lösungen der komplexen Gleichung $\bar{z}^2 = z^2$. Dann gilt:

- ☐ $S = \{-1, +1, -i, +i\}$ ☐ $S = \{a + ib \in \mathbb{C} : a = 0 \text{ ou } b = 0\}$
- ☐ $S = \emptyset$ ☐ $S = \mathbb{R}$



Zweiter Teil, Wahr/Falsch-Fragen

Markieren Sie bitte für jede der folgenden Fragen die Box WAHR an, wenn die Aussage **immer korrekt** ist, oder die Box FALSCH, wenn sie **nicht immer korrekt** ist, d.h. wenn die Aussage manchmal falsch ist.

Frage 19 : Habe $f \in C^5([-1, 1])$ die folgende Taylor-Entwicklung der Ordnung 4 um 0:

$$f(x) = 1 + x - x^2 + x^3 - x^4 + o(x).$$

Dann gilt $f'(0) + 3f^{(2)}(0) + f^{(3)}(0) = 1$.

☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 20 : Betrachte die Folge $(x_n)_{n \geq 0}$ definiert durch $x_0 = 2$ und, für $n \geq 1$, $x_n = x_{n-1} - \frac{1}{n}$. Dann konvergiert $(x_n)_{n \geq 0}$.

☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 21 : Die Potenzreihe $\sum_{k=100}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ konvergiert für jedes $x \in \mathbb{R}$.

☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 22 : Sei $f: [-2, 20] \rightarrow [0, 1]$ eine stetige Funktion. Dann gibt es ein $x \in [0, 1]$ so dass $f(x) = x$.

☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 23 : Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ konvergiert.

☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 24 : Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf $\mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktion, so dass die Gleichung $f'(x) = 0$ genau eine Lösung besitzt. Dann besitzt die Gleichung $f(x) = 1$ höchstens zwei verschiedene reelle Lösungen.

☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 25 : Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine beschränkte Menge und $B = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ ist obere Schranke für } A\}$. Dann gilt $\inf B \in B$.

☐ WAHR ☐ FALSCH



Frage 26 : Sei $z \neq 0$ eine komplexe Zahl mit Argument $\frac{\pi}{4}$. Dann ist $-\frac{\pi}{2}$ Argument der komplexen Zahl $\frac{1}{z^2}$ vaut .

☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 27 : Betrachte die Funktion $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = \int_0^{|x|} 1 \, dt$. Dann ist g differenzierbar in $x = 0$.

☐ WAHR ☐ FALSCH

Frage 28 : Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine bijektive Funktion. Dann ist f streng monoton.

☐ WAHR ☐ FALSCH



Dritter Teil, Offene Fragen

Beantworten Sie die Fragen im eingerahmten Bereich. In diesem Teil der Prüfung müssen die Lösungen begründet werden: Der Rechenweg muss erkennbar und jeder Schritt begründet sein. Die grau markierten Kästchen bitte frei lassen, sie werden für die Korrektur benötigt.

Frage 29: *Diese Frage zählt 4 Punkte.*

☐₀ ☐₁ ☐₂ ☐₃ ☐₄

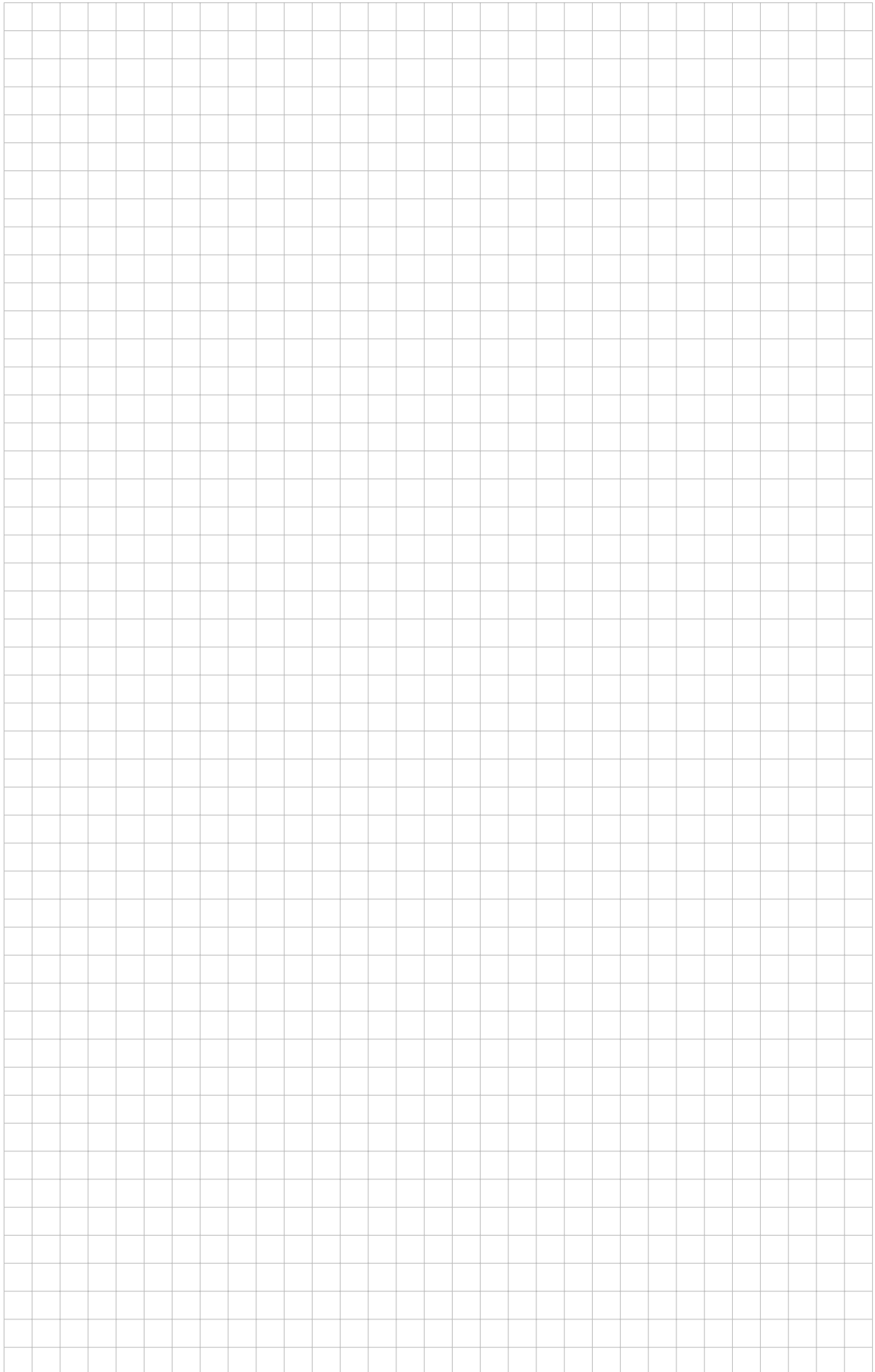
Hier nicht schreiben.

Überprüfen Sie, ob die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n}$$

konvergiert.







Frage 31: *Diese Frage zählt 6 Punkte.*

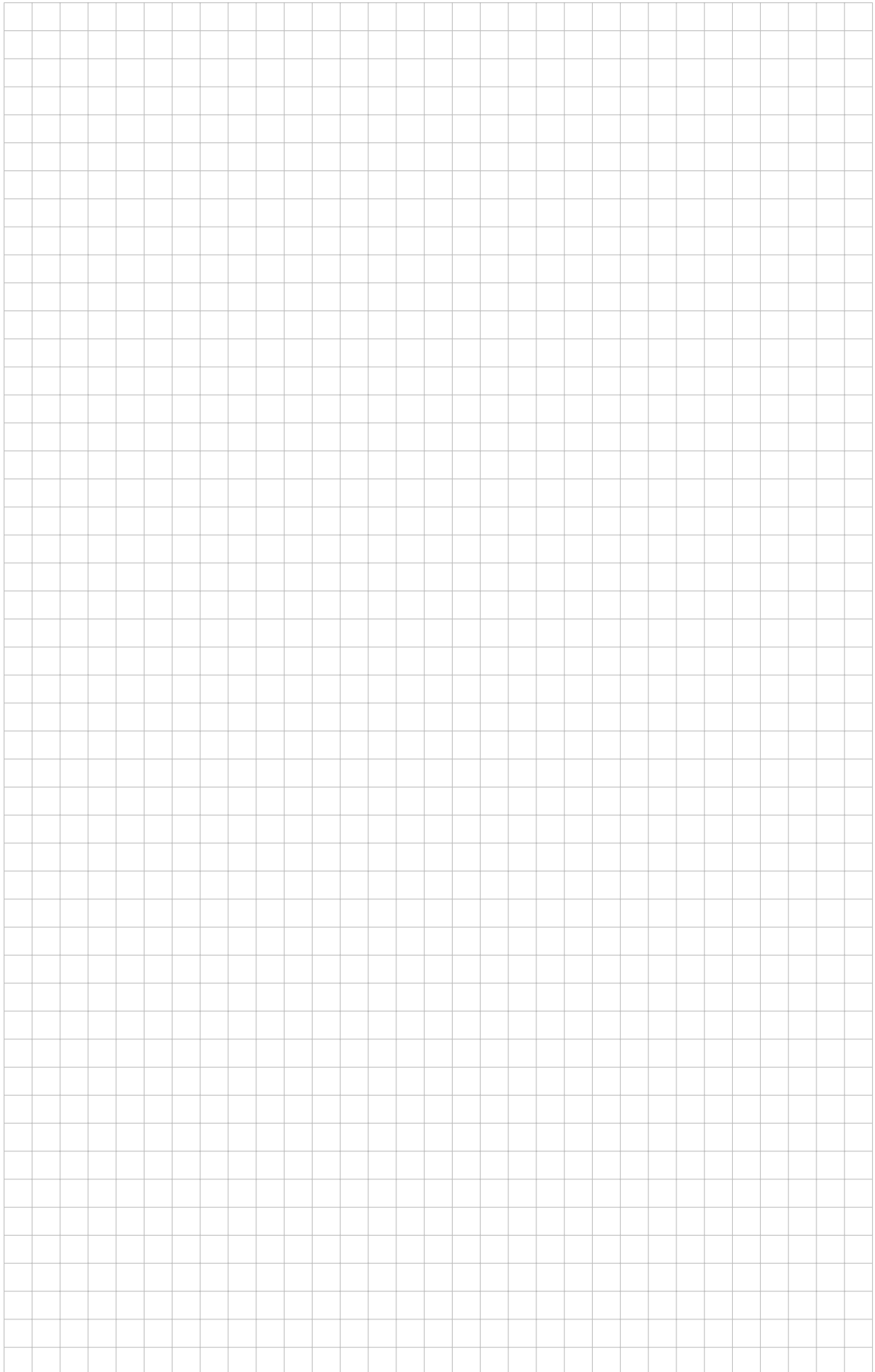
☐ ₀ ☐ ₁ ☐ ₂ ☐ ₃ ☐ ₄ ☐ ₅ ☐ ₆

Hier nicht schreiben.

Zeigen Sie per Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^n (k + k^2) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$







Frage 33: *Diese Frage zählt 6 Punkte.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6

Hier nicht schreiben.

Sei $f \in C^3([0, 1])$. Zeigen Sie die folgende Aussage: Für $x_0 \in]0, 1[$ gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} = f''(x_0).$$



