

(A1) Multiple Choice

Herbst/Winter '24

Prof. J. Krieger

T. Schmid

- a) falsch. Gegenbeispiel: Sei $x_0 = \frac{1}{2}$ und f gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq \frac{1}{2} \\ 1 - \frac{1}{n} & x \in [\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n}), \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n+1})[, \quad n \geq 1 \end{cases} \quad (1)$$

Dann gilt $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}+} f(x) = 1 = f(\frac{1}{2})$ aber in den Punkten $x_n = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n+1})$ mit $n \geq 1$ hat f Sprungstellen. Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}$ kann es dann keine solche Umgebungen geben.

- b) Die Aussage ist falsch. Da f im Punkt x_0 definiert ist, gilt: Die Funktion f ist in x_0 nur dann stetig, wenn $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$ existieren und ausserdem $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = f(x_0)$. Ein Gegenbeispiel ist also $f(0) = 0, f(x) = 1$ für $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$.
- c) f ist nicht injektiv, da eine gerade Funktion, das heisst $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2}} \rightarrow 1 \in \mathbb{R}.$$

Hingegen ist f nicht surjektiv und $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = +\infty$.

- d) f ist stetig, aber weder surjektiv noch injektiv. Da $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ hat f eine stetige Fortsetzung $\hat{f}$ auf das Intervall $[1, 2]$ mit $\hat{f}(1) = 0, \hat{f}(x) = f(x)$ sonst. Weiter ist $f(x) < 0$ für $x \in (1, 2)$, also hat $\hat{f}$ ein Minimum und ist nicht surjektiv. Da $\hat{f}(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow 1$ und $x \rightarrow 2$ jeweils von unten gegen Null konvergiert kann die Funktion mit dem Zwischenwertsatz auch nicht injektiv sein.
- e) f ist injektiv da ungerade, das heisst $f(x) = -f(-x)$ und $f(x)$ ist auf $(0, 1]$ strikt monoton wachsend und positiv. f ist zudem nur stetig für $a = 0$ und $b < 1$, da $|\sin(x)| \leq |x|$ und $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

(A2) Grenzwerte gegen Unendlich

Bestimmen Sie $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ für die Funktionen

- a) $f(x) = 4x^7 - 18x^3 + 9$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ da

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 4x^7 - 18x^3 + 9 = (\lim_{x \rightarrow \infty} x^7) (\lim_{x \rightarrow \infty} 4 - \frac{18}{x^4} + \frac{9}{x^7}) = \infty \cdot 4$$

- b) $f(x) = \sqrt[3]{x} + 12x - 2x^2$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ da

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = (\lim_{x \rightarrow \infty} x^2) (\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{5/3}} + \frac{12}{x} - 2) = \infty \cdot (-2)$$

- c) $f(x) = \frac{8 - 4x^2}{9x^2 + 5x}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{4}{9}$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{4}{9}$ da

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{\frac{8}{x^2} - 4}{9 + \frac{5}{x}} = 1 \cdot \frac{-4}{9}$$

$$d) f(x) = \frac{x^3 - 2x + 11}{3 - 6x^5}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ da

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^4} + \frac{11}{x^5}}{\frac{3}{x^5} - 6} = 0$$

$$e) f(x) = \frac{x+8}{\sqrt{2x^2+3}}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ da

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(1 + \frac{8}{x})}{|x|\sqrt{2 + \frac{3}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f) f(x) = \frac{8+x-4x^2}{\sqrt{6+x^2+7x^4}}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{-4}{\sqrt{7}}$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{-4}{\sqrt{7}}$ da

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(\frac{8}{x^2} + \frac{1}{x} - 4)}{|x|^2 \sqrt{\frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^2} + 7}} = \frac{-4}{\sqrt{7}}$$

Die Grenzwerte gegen $-\infty$ lassen sich jeweils analog bestimmen.

(A3) Stetigkeit mit Parameter

Bei allen Aufgaben, müssen die Parameter so gewählt werden, dass die "Grenzwerte an den Schnittstellen übereinstimmen". Die Funktionen auf den einzelnen Intervallen sind stets für alle a, b stetig. Der Begriff der links und rechtsseitigen Grenzwertes wurde in der Vorlesung zum Zeitpunkt der Übung noch nicht eingeführt, daher wird er in der Lösung ebenfalls nicht benutzt.

- Damit die Funktion stetig ist, muss $a^2x - a$ für $x = 3$ den Wert 4 annehmen. Wenn $a = -1$ oder $a = 4/3$ (Nullstellen von $3a^2 - a = 4$), ist $f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig.
- Es müssen gleichzeitig die Bedingungen $2 \cdot 1^2 + 3a \cdot 1 + b = 4$ und $a \cdot (-1) - b = 2 \cdot (-1)^2 + 3a \cdot (-1) + b$ erfüllt sein. Dieses Gleichungssystem besitzt genau eine Lösung $a = 3/4$ und $b = -1/4$. Für diese Parameter ist die Funktion stetig.
- Unabhängig von a ist $\sin(a\pi) = 0$. Wir suchen also ein $b \in \mathbb{R}$, so dass $\cos(\pi + b\pi) = 0$. Das ist erfüllt für alle $b = k + 1/2$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Damit ist die Funktion für alle

$$(a, b) \in \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 | b = k + 1/2 \text{ für } k \in \mathbb{Z}\}$$

stetig.

(A4) Stetige Fortsetzung

Sei $f : (\frac{1}{2}, 1) \cup (1, \frac{3}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$. Weiterhin sei $\hat{f}_1 : (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch:

$$\hat{f}_1 := \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in (\frac{1}{2}, 1) \cup (1, \frac{3}{2}), \\ a & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

Bestimmen Sie, falls möglich, $a \in \mathbb{R}$, so dass $\hat{f}_1(x)$ eine stetige Funktion auf $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ wird. Führen Sie dies für die folgenden Funktionen $f(x)$ durch:

$$a) f(x) = e^{-\frac{1}{|x-1|}}$$

Wir setzen $y = |x - 1|$ und erhalten dann

$$a = \lim_{x \rightarrow 1} e^{-\frac{1}{|x-1|}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{y}} = 0.$$

b) $f(x) = (x-1) \cos\left(\frac{1}{x-1}\right)$

Wir setzen $y = x - 1$ und erhalten

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \cos\left(\frac{1}{x-1}\right) = \lim_{y \rightarrow 0} y \cos\left(\frac{1}{y}\right).$$

Den dazugehörigen Grenzwert bestimmen wir mittels des Kriteriums der zwei Polizisten für Funktionen. Wir suchen zwei Funktionen $f, h : (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, welche den selben Grenzwert l für $y \rightarrow 0$ haben, und für welche eine Umgebung existiert um $x = 0$, in welcher die Abschätzung

$$f(x) \leq y \cos\left(\frac{1}{y}\right) \leq h(x)$$

gilt. Dann folgt, dass auch $\lim_{y \rightarrow 0} y \cos\left(\frac{1}{y}\right) = l$.

Seien die zwei Funktionen definiert durch

$$f(x) = -y \quad h(x) = y.$$

Auf dem ganzen Intervall $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ gilt

$$f(x) = -y \leq y \cos\left(\frac{1}{y}\right) \leq y = h(x).$$

Somit folgt aufgrund der Konvergenz

$$\lim_{y \rightarrow 0} \pm y = 0,$$

dass auch

$$\lim_{y \rightarrow 0} y \cos\left(\frac{1}{y}\right) = 0.$$

Somit $a = 0$.

c) $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - x}$

Wir vereinfachen zuerst

$$\frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - x} = \frac{(x+4)(x-1)}{x(x-1)} = \frac{x+4}{x},$$

und erhalten damit

$$a = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+4}{x} = 5.$$

d) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{|x-1|}}\right)$

Wir setzen $y = |x-1|$ und erhalten

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{|x-1|}}\right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right).$$

Nun können wir aber zwei Folgen konstruieren, die gegen Null konvergieren, und deren Funktionswerte gegen zwei verschiedene Werte konvergieren. Seien

$$b_n = \left(\frac{1}{2\pi n}\right)^2, \quad c_n = \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}\right)^2, \quad n \geq 1.$$

Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{b_n}}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2\pi n) = 0,$$

sowie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{c_n}}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1.$$

Somit existiert der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ nicht. Daher gibt es kein a , für das die Funktion $\hat{f}_1$ stetig wird.

(A5) Einseitige Grenzwerte

Bestimmen Sie die folgenden einseitigen Grenzwerte.

a) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3} + \sqrt{x+3}}{\sqrt{x^2 - 9}}$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3} + \sqrt{x+3}}{\sqrt{x^2 - 9}} &\geq \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x^2 - 9}} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}\sqrt{x+3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{\sqrt{x-3}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{y}} = \infty. \end{aligned}$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Wir wenden das Kriterium der zwei Polizisten für Funktionen an. Seien zwei Funktionen $f, h : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, die gegen den selben Grenzwert l konvergieren in $x = 0$. Weiter soll gelten, dass

$$f(x) \leq \sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq h(x)$$

in einer Umgebung von $x = 0$. Dann folgt, dass auch $\sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ gegen den Grenzwert l konvergiert in $x = 0$.

Seien $f(x) = -\sqrt{x}$ und $h(x) = \sqrt{x}$. Dann gilt für alle $x > 0$

$$f(x) = -\sqrt{x} \leq \sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq \sqrt{x} = h(x)$$

Ausserdem gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \pm\sqrt{x} = 0$$

Also gilt auch

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin(x))^{1/x}$

Wir betrachten den Grenzwert für $x \rightarrow 0^+$. Wir können daher annehmen, dass $0 < x < \pi$ und somit $\sin(x) > 0$. Daher können wir umformen

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin(x))^{1/x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(e^{\text{Log}(\sin(x))} \right)^{1/x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\left(\frac{1}{x} \text{Log}(\sin(x))\right)}. \end{aligned}$$

Aus $\sin(x) < x$ für $0 < x < \pi$ ergibt sich durch die Monotonie des Logarithmus, dass $\log(\sin(x)) < \log(x)$. Somit erhalten wir

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \log(\sin(x)) < \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \log(x) = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \log\left(\frac{1}{x}\right) = -\infty \cdot \infty = -\infty$$

und daher

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\left(\frac{1}{x} \log(\sin(x))\right)} = e^{-\infty} = 0.$$