

(A1) Multiple Choice

- a) wahr, denn als Beispiel können wir $f(0) = 1$ und $f(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ setzen.
- b) falsch. Die Funktion lässt sich nur stetig fortsetzen, wenn auch $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$. Ein Sprung lässt sich nicht stetig fortsetzen.
- c) wahr. Da f auf einem einzelnen Intervall definiert, bijektiv und stetig ist. (Wäre f über mehrere Intervalle definiert, könnte die Umkehrfunktion Sprünge haben und wäre dann nicht stetig.)
- d) falsch. Diese Aussage gilt nur für stetige Funktionen. Wenn die streng monoton wachsende Funktion (mindestens) eine Sprungstelle hat, so ist sie nicht surjektiv.
- e) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$, da $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$.

(A2) Definitionsbereich und Umkehrfunktion

Wir betrachten die Funktion

$$f : E \rightarrow F, \quad x \mapsto e^{\sqrt{25-\sqrt{x}}}$$

wobei $E, F \subset \mathbb{R}$.

- a) Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich E und das dazugehörige Bild $f(E)$ von f .

Die Funktion ist definiert für $25 - \sqrt{x} \geq 0$ und $x \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 25^2$. Also ist

$$E = [0, 625], \quad f(E) = [1, e^5]$$

- b) Überlegen Sie: f ist eine Zusammensetzung von streng monotonen Funktionen und damit injektiv.

Wir trennen zunächst f in 3 streng monotone Funktionen auf, so dass $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$ gilt.

- $f_1(x) = \sqrt{x}$, streng monoton wachsend (★).
- $f_2(x) = \sqrt{25 - x}$, streng monoton fallend (■).
- $f_3(x) = \exp(x)$, streng monoton wachsend (★).

Es gilt

$$(f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x) = f_3(f_2(f_1(x))) = f_3(f_2(\sqrt{x})) = f_3\left(\sqrt{25 - \sqrt{x}}\right) = e^{\sqrt{25 - \sqrt{x}}}$$

Wir zeigen nun mit der Definition von strenger Monotonie, dass f streng monoton fallend ist.

$$\begin{aligned} x < y &\stackrel{\star}{\Leftrightarrow} f_1(x) < f_1(y) \\ f_1(x) < f_1(y) &\stackrel{\blacksquare}{\Leftrightarrow} f_2(f_1(x)) > f_2(f_1(y)) \\ f_2(f_1(x)) > f_2(f_1(y)) &\stackrel{\star}{\Leftrightarrow} \underbrace{f_3(f_2(f_1(x)))}_{f(x)} > \underbrace{f_3(f_2(f_1(y)))}_{f(y)} \end{aligned}$$

Da $f_3(f_2(f_1(x))) = f(x)$, folgt aus den obigen Gleichungen

$$x < y \Leftrightarrow f(x) > f(y).$$

Herbst/Winter '24

Prof. J. Krieger

T. Schmid

Dies entspricht genau der Definition von streng monoton fallend. Eine streng monoton fallende Funktion ist auf jeden Fall injektiv, denn aus

$$x < y \Leftrightarrow f(x) > f(y)$$

folgt sofort

$$x \neq y \Leftrightarrow f(x) \neq f(y),$$

was genau der Definition von Injektivität entspricht.

- c) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion f^{-1} . Gebe auch ihren Definitionsbereich und Wertebereich an.

Die Umkehrfunktionen der 3 Funktionen f_1, f_2 und f_3 sind gegeben durch

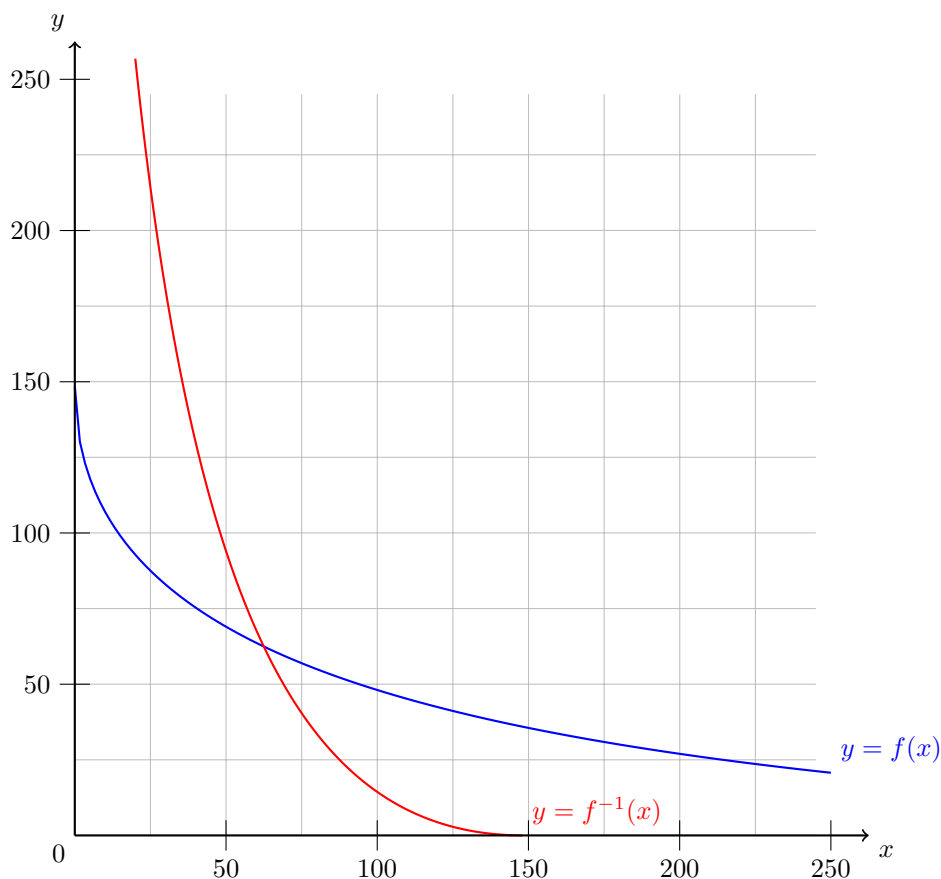
- $f_1^{-1}(x) = x^2$
- $f_2^{-1}(x) = 25 - x^2$
- $f_3^{-1}(x) = \text{Log}(x)$

Damit berechnen wir die Umkehrfunktion ihrer Komposition, f .

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) &= (f_3 \circ f_2 \circ f_1)^{-1}(x) \\ &= (f_1^{-1} \circ f_2^{-1} \circ f_3^{-1})(x) \\ &= f_1^{-1}(f_2^{-1}(f_3^{-1}(x))) \\ &= f_1^{-1}(f_2^{-1}(\text{Log}(x))) \\ &= f_1^{-1}(25 - \text{Log}(x)^2) \\ &= (25 - \text{Log}(x)^2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} f^{-1} : & [1, e^5] & \rightarrow & [0, 625] \\ & x & \mapsto & (25 - \text{Log}(x)^2)^2 \end{array}$$

- d) Zeichnen Sie die Umkehrfunktion qualitativ in die unten stehende Abbildung ein.



Die Umkehrfunktion entspricht also genau der Spiegelung des Graphen an der Diagonalen, die durch $y = x$ beschrieben wird.

(A3) Der Logarithmus

(i) Wir benutzen die Definitionen 4.7 und 4.8 des Vorlesungsskripts. Dann gilt

$$\begin{aligned} (-2 + i)^{5+6i} &= \exp[(5 + 6i) \operatorname{Log}(-2 + i)] = \exp[(5 + 6i)(\operatorname{Log}(\sqrt{5}) + i \arg(-2 + i))] \\ &= \exp[(5 + 6i)(\operatorname{Log}(\sqrt{5}) + i(\pi - \tan^{-1}(0.5)))] \\ &= \exp[5 \operatorname{Log}(\sqrt{5}) - 6(\pi - \tan^{-1}(0.5)) + i(5(\pi - \tan^{-1}(0.5)) + 6 \operatorname{Log}(\sqrt{5}))] \\ &= \exp(5 \operatorname{Log}(\sqrt{5}) - 6(\pi - \tan^{-1}(0.5))) (\cos(5(\pi - \tan^{-1}(0.5)) + 6 \operatorname{Log}(\sqrt{5})) + \\ &\quad i \sin(5(\pi - \tan^{-1}(0.5)) + 6 \operatorname{Log}(\sqrt{5}))) \end{aligned}$$

Somit

$$x = \exp(5 \operatorname{Log}(\sqrt{5}) - 6(\pi - \tan^{-1}(0.5))) \cdot \cos(5(\pi - \tan^{-1}(0.5)) + 6 \operatorname{Log}(\sqrt{5}))$$

und

$$y = \exp(5 \operatorname{Log}(\sqrt{5}) - 6(\pi - \tan^{-1}(0.5))) \cdot \sin(5(\pi - \tan^{-1}(0.5)) + 6 \operatorname{Log}(\sqrt{5})).$$

Hinweis: $\arg(-2 + i) = \arccos(-2/\sqrt{5}) = (\pi - \tan^{-1}(0.5))$.

(ii) Die Funktion ist streng monoton wachsend, nach oben beschränkt und bijektiv.

(A4) Stetigkeit nachweisen anhand des ϵ, δ -Kriteriums

Seien die beiden Funktionen f und g wie folgt definiert.

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 7x - \frac{3}{2} \end{cases} \qquad g : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{cases}$$

Weisen Sie die Stetigkeit beider Funktionen in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ mit Hilfe des ϵ, δ -Kriteriums nach.

Funktion f : Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ ein beliebiger Punkt. Wir fixieren $\epsilon > 0$. Weiter sei $\delta := \frac{\epsilon}{7}$. Dann gilt, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$ die folgende Abschätzung erfüllt ist

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= \left| 7x - \frac{3}{2} - \left(7x_0 - \frac{3}{2} \right) \right| = |7x - 7x_0| \\ &= 7|x - x_0| < 7\delta = 7 \cdot \frac{\epsilon}{7} = \epsilon. \end{aligned}$$

Somit ist die Definition der Stetigkeit erfüllt in jedem beliebigen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$.

Funktion g : Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ ein beliebiger Punkt. Wir fixieren $\epsilon > 0$. Weiter sei $\delta := -|x_0| + \sqrt{x_0^2 + \epsilon}$. Dann gilt, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$ die folgende Abschätzung erfüllt ist

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &= |x^2 - x_0^2| = |(x - x_0)(x + x_0)| \\
&= \underbrace{|x - x_0|}_{< \delta} |x + x_0| < \delta |x + x_0| \\
&= \delta |x - x_0 + x_0 + x_0| \leq \delta \left(\underbrace{|x - x_0|}_{< \delta} + |2x_0| \right) \\
&\stackrel{*}{<} \delta^2 + 2|x_0|\delta \\
&= \left(-|x_0| + \sqrt{x_0^2 + \epsilon} \right)^2 + 2|x_0| \left(-|x_0| + \sqrt{x_0^2 + \epsilon} \right) \\
&= x_0^2 - 2|x_0|\sqrt{x_0^2 + \epsilon} + (x_0^2 + \epsilon) - 2x_0^2 + 2|x_0|\sqrt{x_0^2 + \epsilon} \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Somit ist die Definition der Stetigkeit erfüllt in jedem beliebigen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$.

Die Wahl von δ erklären wir anhand der Stelle $*$ der Ungleichung: Es soll gelten, dass $|f(x) - f(x_0)| \stackrel{*}{<} \delta^2 + 2|x_0|\delta \leq \epsilon$ ist. Die Gleichung $\delta^2 + 2|x_0|\delta = \epsilon$ kann man mit der Mitternachtsformel nach δ auflösen, womit man $\delta = -|x_0| + \sqrt{x_0^2 + \epsilon}$ erhält.

(A5) Stetigkeit widerlegen anhand des ϵ, δ -Kriteriums

Sei $\epsilon = \frac{1}{10}$ für $x_0 \in \mathbb{R}$. Für jedes $\delta > 0$ existiert ein $y \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ mit $y < x_0$. Wir haben $\sup_{x < x_0} f(x) = \frac{1}{8}$ und $f(x_0) = \frac{1}{4}$. Demnach ist $f(y) \leq \frac{1}{8}$ und $|f(y) - f(x_0)| \geq \frac{1}{8} \geq \epsilon$. Das gilt unabhängig davon wie klein $\delta > 0$ gewählt wird. Demnach ist f in x_0 nicht stetig.

(A6) Stetigkeit

Finden Sie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, so dass die reelle Funktion f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig wird.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -5 \\ \sqrt{x+a}, & -5 < x \leq -1 \\ 2x^2 + bx + 1, & -1 < x \leq 1 \\ cx + d, & 1 < x \leq 2 \\ 0, & 2 < x \end{cases}$$

Um die Werte für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ zu finden so dass die Funktion f stetig ist, betrachten wir die vier Stellen $-5, -1, 1$ und 2 , an denen die Grenzen der Fallunterscheidungen sind.

Um Stetigkeit an der Stelle -5 zu garantieren, muss der rechtsseitige Grenzwert in -5 mit dem Funktionswert $f(-5)$ übereinstimmen.

$$\begin{aligned}
f(-5) &= \lim_{x \rightarrow (-5)^+} f(x) \\
0 &= \lim_{x \rightarrow (-5)^+} \sqrt{x+a} \Rightarrow a = 5.
\end{aligned}$$

An der zweiten Stelle $x = -1$ gilt analog

$$\begin{aligned}
f(-1) &= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) \\
\sqrt{4} &= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} 2x^2 + bx + 1 \Rightarrow b = 1.
\end{aligned}$$

Für die Unbekannten c und d betrachten wir die Stellen $x = 1$ und $x = 2$

$$\begin{aligned}
f(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \\
4 &= \lim_{x \rightarrow 1^+} cx + d \\
4 &= c + d
\end{aligned}$$

und

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$
$$2c + d = 0$$

Daraus folgt $c = -4$ und $d = 8$.

Die resultierende Funktion auf dem Intervall $x = [-6, 3]$ ist gegeben

