

(A1) Multiple Choice

- a) $\bar{z} = 2 - 2i$. Durch Umwandlung in die Polardarstellung und mit der Formel von Moivre erhalten wir

$$\begin{aligned} \left(\frac{1 - \sqrt{3}i}{1 + i} \right)^3 &= \left(\frac{1 - \sqrt{3} - i(1 + \sqrt{3})}{2} \right)^3 \\ &= \left(\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right) \right)^3 = 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 2 + 2i \end{aligned}$$

- b) falsch. Gegenbeispiel $f = \sin(2\pi x)$ ist auf diesen Intervallen surjektiv aber nicht injektiv.
- c) falsch. Gegenbeispiel $f = \frac{1}{\pi} \arcsin(x)$.
- d) falsch. Eine monoton fallende Funktion kann über ein Intervall konstant sein und somit kann es x_1, x_2 geben, sodass $f(x_1) = f(x_2)$, aber $x_1 \neq x_2$.
- e) falsch. Gegenbeispiel: Es seien die Mengen $E = G = H = \mathbb{R}$ und $F = [0, \infty[$ gegeben. Die Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = x$ sind mit dieser Definition surjektiv. Wir können ein $y = -1 \in H$, wählen und finden $x = -1 \in G$, sodass $g(x) = y$. Aber wir können kein $w \in E$ finden, sodass

$$f(w) = w^2 = -1 = x.$$

Somit ist die Komposition nicht surjektiv.

- f) richtig. Aus der Injektivität von g folgt aus $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, dass $f(x_1) = f(x_2)$. Aus der Injektivität von f folgt dann wiederum, dass $x_1 = x_2$, so dass die Komposition ebenfalls injektiv ist.
- g) richtig. Da f und g bijektiv sind und der Wertebereich von f gleich dem Definitionsbereich von g ist.

(A2) Komplexe Zahlen

- (1) Lösen Sie nach $z \in \mathbb{C}$ auf. Falls mehrere Lösungen existieren, geben Sie alle an.

- a) $e^z = -3 - 2i$

Die Lösungen von $e^z = -3 - 2i$ sind gegeben durch $z = \text{Log}(-3 - 2i)$. Diese Gleichung ist erfüllt für

$$z_k = \text{Log}|-3 - 2i| + i(\arg(-3 - 2i) + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

In Polarform ist $-3 - 2i$ gegeben durch

$$-3 - 2i = \rho e^{i\varphi}, \text{ wobei } \rho = |-3 - 2i| = \sqrt{13} \text{ und } \varphi = \text{Arccos}\left(\frac{-3}{\rho}\right) = \text{Arccos}\left(\frac{-3}{\sqrt{13}}\right)$$

Es gilt $\arg(-3 - 2i) = \varphi$, und daher sind alle Lösungen gegeben durch

$$\begin{aligned} z_k &= \text{Log}(\sqrt{13}) + i \left(\text{Arccos}\left(\frac{-3}{\sqrt{13}}\right) + 2\pi k \right) \\ &= \frac{\text{Log}(13)}{2} + i \left(\pi - \text{Arccos}\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right) + 2\pi k \right) \\ &= \frac{\text{Log}(13)}{2} + i \left(-\text{Arccos}\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right) + \pi(2k + 1) \right), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Es gibt also unendlich viele Lösungen dieser Gleichung! Die Lösungsmenge lautet

$$z \in \left\{ \frac{\operatorname{Log}(13)}{2} + i \left(-\operatorname{Arccos} \left(\frac{3}{\sqrt{13}} \right) + 2k\pi \right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

b) $3^z = 9$

Wir schreiben 3^z mit der Exponential- und Logarithmusfunktion als

$$3^z = \left(e^{\operatorname{Log}(3)} \right)^z = e^{\operatorname{Log}(3) \cdot z}$$

Also folgt

$$\begin{aligned} 3^z = 9 &\Rightarrow e^{z \operatorname{Log}(3)} = 9 \\ &\Rightarrow z \operatorname{Log}(3) = \operatorname{Log}(9) + i2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} : \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} z &= \frac{\operatorname{Log}(9) + i2\pi k}{\operatorname{Log}(3)} \\ &= \frac{\operatorname{Log}(3 \cdot 3)}{\operatorname{Log}(3)} + i \frac{2\pi k}{\operatorname{Log}(3)}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &= \frac{2 \operatorname{Log}(3)}{\operatorname{Log}(3)} + i \frac{2\pi k}{\operatorname{Log}(3)}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Es gibt also unendlich viele Lösungen dieser Gleichung und die Lösungsmenge lautet

$$z \in \left\{ 2 + i \frac{2\pi k}{\operatorname{Log}(3)} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

c) $\cos z = \sqrt{2}$

Wir benutzen die Darstellung $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \cos z = \sqrt{2} &\iff e^{iz} + e^{-iz} = 2\sqrt{2} \\ &\iff e^{iz} (e^{iz} + e^{-iz}) = e^{iz} 2\sqrt{2} \\ &\iff e^{2iz} + \underbrace{e^{iz-iz}}_{e^0=1} - e^{iz} 2\sqrt{2} = 0 \\ &\iff e^{2iz} - 2\sqrt{2}e^{iz} + 1 = 0 \\ &\stackrel{w=e^{iz}}{\iff} w^2 - 2\sqrt{2}w + 1 = 0. \end{aligned}$$

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind durch die Mitternachtsformel gegeben durch

$$w = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 4}}{2} = \sqrt{2} \pm 1.$$

Die Rücksubstitution ergibt somit $e^{iz} = w = (\sqrt{2} \pm 1)$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} iz &= \operatorname{Log}(\sqrt{2} \pm 1) \\ &= \operatorname{Log}(\sqrt{2} \pm 1) + i2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

woraus das Resultat folgt

$$z = -i(\operatorname{Log}(\sqrt{2} \pm 1) + i2\pi k) = 2k\pi - i\operatorname{Log}(\sqrt{2} \pm 1), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Auch hier gibt wieder unendlich viele Lösungen und die Lösungsmenge lautet

$$z \in \left\{ 2k\pi - i\operatorname{Log}(\sqrt{2} \pm 1) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

d) $z^3 = 2e^{3+i\frac{\pi}{2}}$

$$z^3 = 2e^{3+i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow z^3 = 2e^3 e^{i\frac{\pi}{2}}$$

In Polarform haben wir

$$z^3 = 2e^3 e^{i\frac{\pi}{2}} \stackrel{!}{=} \rho e^{i\varphi} \Rightarrow \rho = 2e^3, \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Laut der Formel von Moivre sind die n Zahlen

$$\omega_k = \sqrt[n]{\rho} \left[\cos \left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) \right] = \sqrt[n]{\rho} e^{i \left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right)}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

allesamt n -te Wurzeln von $\omega = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho e^{i\varphi}$. Wir benutzen diese Formel und finden die drei dritten Wurzeln von $2e^{3+i\frac{\pi}{2}}$:

$$z_k = \sqrt[3]{2e^3} e^{i \left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} \right)}$$

$$z_0 = \sqrt[3]{2} e \cdot e^{i \left(\frac{\pi}{3} \right)} = \sqrt[3]{2} e^1 e^{i \frac{\pi}{6}},$$

$$z_1 = \sqrt[3]{2} e \cdot e^{i \left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} \right)} = \sqrt[3]{2} e^1 e^{i \frac{5\pi}{6}},$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2} e \cdot e^{i \left(\frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3} \right)} = \sqrt[3]{2} e^1 e^{i \frac{3\pi}{2}} = \sqrt[3]{2} e^1 e^{-i \frac{\pi}{2}}.$$

Die Lösungsmenge lautet also

$$z \in \{z_0, z_1, z_2\} = \left\{ \sqrt[3]{2} e^1 e^{i \frac{\pi}{6}}, \sqrt[3]{2} e^1 e^{i \frac{5\pi}{6}}, \sqrt[3]{2} e^1 e^{-i \frac{\pi}{2}} \right\}$$

e) $(z + 3i)^5 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$

Wir substituieren $w = z + 3i$ und betrachten wie in Aufgabe d) die Polarform von w^5 .

$$\begin{aligned} w^5 &= \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \stackrel{!}{=} \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ \Rightarrow \rho &= \left| \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right| = 1, \quad \varphi = \arccos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Nach der Formel von Moivre sind die fünf fünften Wurzeln von $\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$ gegeben durch:

$$w_k = \sqrt[5]{1} e^{i \frac{\frac{\pi}{6} + 2\pi k}{5}}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

$$w_0 = e^{i \left(\frac{\frac{\pi}{6}}{5} \right)} = e^{i \frac{\pi}{30}}$$

$$w_1 = e^{i \left(\frac{\frac{\pi}{6} + 2\pi}{5} \right)} = e^{i \frac{13\pi}{30}}$$

$$w_2 = e^{i \left(\frac{\frac{\pi}{6} + 4\pi}{5} \right)} = e^{i \frac{5\pi}{6}}$$

$$w_3 = e^{i \left(\frac{\frac{\pi}{6} + 6\pi}{5} \right)} = e^{i \frac{37\pi}{30}} = e^{-i \frac{23\pi}{30}}$$

$$w_4 = e^{i \left(\frac{\frac{\pi}{6} + 8\pi}{5} \right)} = e^{i \frac{49\pi}{30}} = e^{-i \frac{11\pi}{30}}$$

Somit erhalten wir für z die Lösungsmenge (Rücksubstitution!):

$$z \in \left\{ e^{i \frac{\pi}{30}} - 3i, e^{i \frac{13\pi}{30}} - 3i, e^{i \frac{5\pi}{6}} - 3i, e^{-i \frac{23\pi}{30}} - 3i, e^{-i \frac{11\pi}{30}} - 3i \right\}$$

Leider sind die Ausdrücke durch die Subtraktion von $3i$ nicht mehr in einer Standardform. Durch Umformen des Exponentialteils in die kartesische Form können wir dies beheben und erhalten

$$z \in \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{30}\right) + i\left(\sin\left(\frac{\pi}{30}\right) - 3\right), \cos\left(\frac{13\pi}{30}\right) + i\left(\sin\left(\frac{13\pi}{30}\right) - 3\right), \right. \\ \left. -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{5}{2}, \cos\left(\frac{23\pi}{30}\right) - i\left(\sin\left(\frac{23\pi}{30}\right) + 3\right), \right. \\ \left. \cos\left(\frac{11\pi}{30}\right) - i\left(\sin\left(\frac{11\pi}{30}\right) + 3\right) \right\}$$

Für diese Umformung verwenden wir folgende Eigenschaften von $e, \sin, \cos$:

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad \cos(-z) = \cos(z), \quad \sin(-z) = -\sin(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

(2) Existiert ein $n \in \mathbb{N}$ für dass $(1 + i\sqrt{3})^n$ rein imaginär ist?

Nein, $(1 + i\sqrt{3})^n = 2^n(\cos(n\frac{\pi}{3}) + i\sin(n\frac{\pi}{3}))$. Damit dieser Ausdruck rein imaginär ist muss $\cos(n\frac{\pi}{3}) = 0$ sein. Das heisst $n\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ muss für ein $k \in \mathbb{Z}$ gelten. Diese Gleichung kann aber für kein k erfüllt werden.

Existiert ein $n \in \mathbb{N}$ für dass $(1 + i\sqrt{3})^n$ reell ist?

Ja, es muss gelten $\sin(n\frac{\pi}{3}) = 0$, das heisst $n\frac{\pi}{3} = k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$. Dies ist für alle $n = 3k$ erfüllt.

(A3) Cosinus und Sinus

a) Zeigen Sie mit Hilfe der Reihendarstellung von $\exp(x), \sin(x), \cos(x)$ die folgenden Identitäten

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

Wir zeigen die Identität für die Sinusfunktion, die rechte Identität folgt nahezu gleich. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} &= \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-ix)^k}{k!}}{2i} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{(ix)^k - (-1)^k(ix)^k}{k!}}{2i} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k(1 - (-1)^k)}{2ik!} \\ &\stackrel{*}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(ix)^{2k+1}}{2i(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i)^{2k+1}x^{2k+1}}{i(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i)^{2k}x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin(x) \end{aligned}$$

Das Gleichheitszeichen an der Stelle $*$ ergibt sich daraus, dass für alle k gerade $(1 - (-1)^k) = 0$ gilt, während für k ungerade $1 - (-1)^k = 2$ gilt.

b) Verwenden Sie das Ergebnis aus a),

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

um folgende Identitäten zu beweisen:

$$(i) \quad \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

Es gilt

$$\cos^2(x) = \frac{(e^{ix})^2 + 2e^{ix}e^{-ix} + (e^{-ix})^2}{4} = \frac{(e^{ix})^2 + 2 + (e^{-ix})^2}{4}$$

$$\sin^2(x) = \frac{(e^{ix})^2 - 2e^{ix}e^{-ix} + (e^{-ix})^2}{-4} = -\frac{(e^{ix})^2 - 2 + (e^{-ix})^2}{4}$$

und somit

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = \frac{(e^{ix})^2 + 2 + (e^{-ix})^2}{4} - \frac{(e^{ix})^2 - 2 + (e^{-ix})^2}{4} = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1.$$

$$(ii) \quad 2 \sin(x) \cos(x) = \sin(2x)$$

Wir erhalten:

$$2 \sin(x) \cos(x) = 2 \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \cdot \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2i} = \sin(2x).$$

(A4) Hyperbolische Funktionen

Zeigen Sie, dass folgende Identitäten für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gelten:

$$a) \quad \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

Wir erhalten direkt

$$\begin{aligned} \cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x} - e^{2x} + 2e^x e^{-x} - e^{-2x}}{4} \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} = 1. \end{aligned}$$

$$b) \quad \sinh(x+y) = \sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y)$$

$$\begin{aligned} \sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y) &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2} \right) + \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2} \right) \\ &= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} - e^{y-x} - e^{-(x+y)}}{4} \\ &\quad + \frac{e^{x+y} - e^{x-y} + e^{y-x} - e^{-(x+y)}}{4} \\ &= \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = \sinh(x+y). \end{aligned}$$

$$c) \quad \tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$$

Beachte, dass

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x(e^x - e^{-x})}{e^x(e^x + e^{-x})} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1},$$

und somit

$$\begin{aligned} \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y} &= \frac{\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} + \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}}{1 + \left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \right) \left(\frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} \right)} \\ &= \frac{(e^{2x}-1)(e^{2y}+1) + (e^{2x}+1)(e^{2y}-1)}{(e^{2x}+1)(e^{2y}+1) + (e^{2x}-1)(e^{2y}-1)} \\ &= \frac{2e^{2x+2y} - 2}{2e^{2x+2y} + 2} = \frac{e^{2(x+y)} - 1}{e^{2(x+y)} + 1} = \tanh(x+y). \end{aligned}$$

(A5) Definitionsbereiche

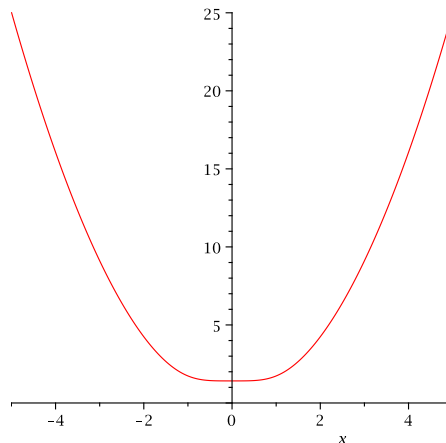
Sei die Funktion $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ mit $E \subset \mathbb{R}$ gegeben durch

$$x \mapsto f(x) = \sqrt{2+x^4}.$$

- a) Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich $D(f) = E$ der Funktion f sowie das Bild $f(E)$.

Wir haben den Definitionsbereich $D(f) = \mathbb{R}$ und das Bild $\text{Bild}(f) = [\sqrt{2}, \infty[$.

- b) Zeichnen Sie den Graphen von f (qualitativ).



- c) Bestimmen Sie das Urbild $f^{-1}([0, 5])$.

$$f^{-1}([0, 5]) = [-\sqrt[4]{23}, \sqrt[4]{23}].$$

- d) Seien $g(x) = \frac{1}{x-1}$, $h(x) = x^2$.

Berechnen Sie die Verknüpfung $t(x) = (g \circ h \circ f)(x)$.

$$\begin{aligned} t(x) &= (g \circ h \circ f)(x) = g(h(f(x))) = g(h(\sqrt{2+x^4})) \\ &= g((\sqrt{2+x^4})^2) = g(2+x^4) = \frac{1}{(2+x^4)-1} = \frac{1}{x^4+1}. \end{aligned}$$

- e) Sei zusätzlich die Funktion s gegeben durch $x \mapsto s(x) = e^x = \exp(x)$. Bestimmen Sie den Definitionsbereich $D(f \circ s^{-1})$. Berechnen Sie anschliessend $(f \circ s^{-1})(x)$.

Wir haben $D(f \circ s^{-1}) =]0, \infty[$ und

$$(f \circ s^{-1})(x) = f(s^{-1}(x)) = f(\text{Log}(x)) = \sqrt{2 + (\text{Log}(x))^4}$$

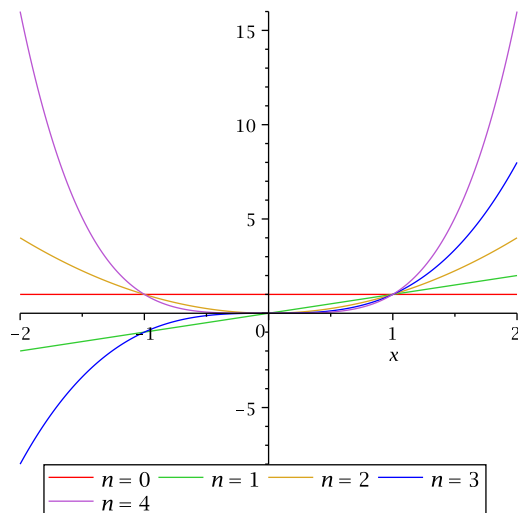
(A6) Injektivität und Surjektivität

Geben Sie zu jeder der folgenden Funktionen $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ an, ob sie injektiv, surjektiv oder bijektiv ist und ob sie ein Infimum, Supremum, Minimum- oder Maximumsstellen besitzt. Tipp: Zeichnen Sie den Graph der Funktion, um eine bessere Vorstellung zu erhalten.

- a) $f(x) = x^n$, $E = \mathbb{R}$, für $n = 0, 1, 2, 3$

- $n = 0$ Für $n = 0$ ist die Funktion gegeben durch $f(x) = x^0 = 1$. Sie ist weder injektiv, noch surjektiv. Weiter gilt $\inf = 1$, $\sup = 1$ und jedes x ist Minimum- und Maximumsstelle.
- $n = 1$ Für $n = 1$ ist die Funktion gegeben durch $f(x) = x^1 = x$. Sie ist bijektiv, hat kein Infimum und kein Supremum und keine Minimum- und Maximumsstellen.
- $n = 2$ Für $n = 2$ ist die Funktion gegeben durch $f(x) = x^2$. Sie ist nicht injektiv, da für $x \in \mathbb{R}$ gilt $(-x)^2 = x^2$, und auch nicht surjektiv, da keine negativen Werte angenommen werden. Weiter ist $\inf = 0$, und es gibt kein Supremum. $x = 0$ ist die Minimumsstelle, und es existiert keine Maximumsstelle.

- $n = 3$ Für $n = 3$ ist die Funktion gegeben durch $f(x) = x^3$. Sie ist bijektiv, hat kein Infimum und kein Supremum und keine Minimum- und Maximumsstellen.



b) $f(x) = x^n$, $E =]0, 3]$, für $n = 0, 1, 2, 3$

- $n = 0$ Die Funktion ist gegeben durch $f(x) = x^0 = 1$. Sie ist weder injektiv, noch surjektiv; $\inf = 1$, $\sup = 1$; jedes x ist Minimum- und Maximumsstelle.
- $n = 1$ Die Funktion ist gegeben durch $f(x) = x$. Sie ist injektiv, aber nicht surjektiv; $\inf = 0$, $\sup = 3$; keine Minimumsstelle, $x = 3$ Maximumsstelle.
- $n = 2$ Die Funktion ist gegeben durch $f(x) = x^2$. Sie ist injektiv, aber nicht surjektiv; $\inf = 0$, $\sup = 3^2 = 9$; keine Minimumsstelle, $x = 3$ Maximumsstelle.
- $n = 3$ Die Funktion ist gegeben durch $f(x) = x^3$. Sie ist injektiv, aber nicht surjektiv; $\inf = 0$, $\sup = 3^3 = 27$; keine Minimumsstelle, $x = 3$ Maximumsstelle.

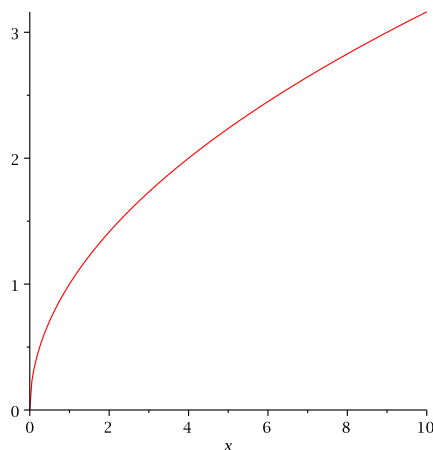
c) $f(x) = \sqrt{x}$, $E = D(f)$.

Der Definitionsbereich ist $E = D(f) = [0, \infty[$.

Die Funktion ist injektiv, aber nicht surjektiv.

(es werden keine negativen Werte angenommen)

Weiter ist $\inf = 0$, kein Supremum;
 $x = 0$ ist Minimumsstelle,
keine Maximumsstellen.



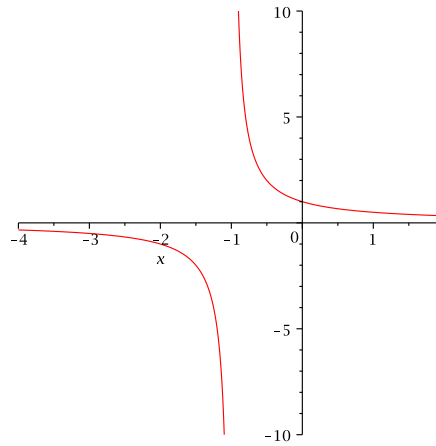
d) $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $E = D(f)$.

Der Definitionsbereich ist $E = D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Die Funktion ist injektiv, aber nicht surjektiv (der Wert 0 wird nicht angenommen);

kein Infimum und Supremum;

keine Min/Maximumsstellen.



e) $f(x) = (f_2 \circ f_1)(x)$, mit $f_1(x) = x - 2$, $f_2(x) = |x|$, $E = D(f)$.

Es gilt

$$f(x) = f_2(f_1(x)) = f_2(x-2) = |x-2|.$$

Der Definitionsbereich ist $E = D(f) = \mathbb{R}$.

Die Funktion ist nicht injektiv, nicht surjektiv;

$\inf = 0$, kein Supremum;

$x = 2$ ist Minimumsstelle,

keine Maximumsstellen.

