

(A1) Multiple Choice

- a) Das stimmt, denn alle Lösungen von $z^3 = 1$ sind die dritten Einheitswurzeln $z_1 = 1 = e^{i\pi \cdot 0}$, $z_2 = e^{i\pi \frac{2}{3}}$, $z_3 = e^{i\pi \frac{4}{3}}$.
- b) Das ist falsch, denn das Gegenbeispiel ist $z = 0$.
- c) Es gibt genau zwei. Für $z \neq 0$, können wir schreiben $1 = z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$, also $xy = 0$ und $x^2 = 1 + y^2$. Damit muss $y = 0$ gelten (da $x, y \in \mathbb{R}$) und $x = \pm 1$.
- d) Es gibt unendlich viele. Für $z \neq 0$, können wir alternativ schreiben $z\bar{z} = |z|^2 = 1$. Dies erlaubt alle komplexen Zahlen mit $|z| = 1$ (Kreis um $(0,0)$ mit Radius 1).
- e) Die Reihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$, denn der Konvergenzradius ist $R = \infty$, via z.B. Quotientenkriterium.

(A2) Exponentialfunktion

- a) Es gilt mit Lemma 3.18., dass

$$(\sqrt{\exp(x)})^2 = \exp(x) = \exp\left(\frac{1}{2}x\right) \cdot \exp\left(\frac{1}{2}x\right) = \exp\left(\frac{1}{2}x\right)^2.$$

Wurzel ziehen auf beiden Seiten liefert den Beweis der Aussage.

- b) Es gilt mit Lemma 3.17., dass

$$\exp(-x) = e^{-x} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\exp(x)}.$$

(A3) Reihen II

Bestimmen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren oder divergieren. Die Berechnung des eventuellen Grenzwertes ist nicht nötig.

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\pi^k}{k \cdot 2^k}}_{x_k}$

Die Reihe divergiert. Wir verwenden das Quotientenkriterium, welches besagt, dass wir zu einer gegebenen Folge (x_k) mit $x_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ die Folge (q_k) der Quotienten

$$q_k = \left| \frac{x_{k+1}}{x_k} \right|$$

betrachten können. Wir nehmen an, dass diese Folge (q_k) gegen q_∞ konvergiert. Wenn

$$q_\infty \begin{cases} < 1 & \text{dann konvergiert die Reihe } \sum_{k=0}^{\infty} x_k, \\ > 1 & \text{dann divergiert die Reihe } \sum_{k=0}^{\infty} x_k, \\ = 0 & \text{dann lässt sich nichts sagen über } \sum_{k=0}^{\infty} x_k. \end{cases}$$

Es gilt

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{\frac{\pi^{k+1}}{(k+1) \cdot 2^{(k+1)}}}{\frac{\pi^k}{k \cdot 2^k}} = \frac{\pi^{k+1} \cdot k \cdot 2^k}{\pi^k \cdot (k+1) \cdot 2^{(k+1)}} = \frac{\pi k}{2(k+1)}$$

Somit ist

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{k+1}}{x_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} \frac{k}{k+1} = \frac{\pi}{2} > 1.$$

Folglich divergiert die Reihe.

$$\text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(k!)^2}{(2k)!}}_{x_k}$$

Die Reihe konvergiert. Wir verwenden das Quotientenkriterium.

Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{x_{k+1}}{x_k} &= \frac{\frac{((k+1)!)^2}{(2(k+1))!}}{\frac{(k!)^2}{(2k)!}} = \frac{((k+1)!)^2(2k)!}{(k!)^2(2(k+1))!} = \frac{(k!(k+1))^2(2k)!}{(k!)^2(2(k+1))!} \\ &= \frac{(k!)^2(k+1)^2(2k)!}{(k!)^2(2k+2)!} = \frac{(k!)^2(k+1)^2(2k)!}{(k!)^2(2k)!(2k+1)(2k+2)} \\ &= \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{4k^2+6k+2} \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{k+1}}{x_k} \right| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^2+2k+1}{4k^2+6k+2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^2(1+2k^{-1}+k^{-2})}{k^2(4+6k^{-1}+2k^{-2})} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1+2k^{-1}+k^{-2}}{4+6k^{-1}+2k^{-2}} = \frac{1}{4} < 1. \end{aligned}$$

Folglich konvergiert die Reihe.

$$\text{c) } \sum_{k=2}^{\infty} \underbrace{\frac{k^2-1}{(k-1)^3}}_{y_k}$$

Die Reihe divergiert. Wir verwenden dazu das Majorantenkriterium und zeigen, dass die gegebene Reihe eine Majorante zur divergenten Reihe

$\sum_{k=2}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{k}}_{x_k}$ ist. Es gilt zu zeigen, dass

$$0 \leq |x_k| \leq y_k.$$

Dann folgt aus der Divergenz der Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} x_k$ die Divergenz der Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} y_k$.

$$\begin{aligned} y_k &= \frac{k^2-1}{(k-1)^3} = \frac{(k-1)(k+1)}{(k-1)^3} = \frac{(k+1)}{(k-1)^2} \\ &\geq \frac{k-1}{(k-1)^2} \geq \frac{1}{k-1} \geq \frac{1}{k} = |x_k|. \end{aligned}$$

$$\text{d) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{4k^2+1}-2k-1}{k^2}$$

Die Reihe konvergiert, zum Beispiel nach dem Majorantenkriterium. Wir schreiben für $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{4k^2+1}-2k-1}{k^2} &= - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^n \frac{(\sqrt{4k^2+1}-2k)(\sqrt{4k^2+1}+2k)}{k^2(\sqrt{4k^2+1}+2k)} \\ &= - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2(\sqrt{4k^2+1}+2k)}. \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt

$$\frac{1}{k^2(\sqrt{4k^2+1}+2k)} \leq \frac{1}{k^2}, \quad k \in \mathbb{N}$$

und da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert, wissen wir auch dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(\sqrt{4k^2+1}+2k)}$ konvergiert. Folglich existiert der Wert der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{4k^2+1}-2k-1}{k^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{4k^2+1}-2k-1}{k^2}.$$

e) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^6 + 2k^4 + k}{2k^6 + 5k^3 + 1}$

Die Reihe divergiert. Es gilt

$$\frac{k^6 + 2k^4 + k}{2k^6 + 5k^3 + 1} = \frac{1 + 2k^{-2} + k^{-5}}{2 + 5k^{-3} + k^{-6}} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad k \rightarrow \infty,$$

da der Grenzwert also nicht Null ist, kann die Reihen nicht konvergieren (Cauchy Kriterium für die Partialsumme).

f) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-8)^k}{9k+4}$

Die Reihe divergiert. Wie oben zeigt man, dass $a_k := \frac{(-8)^k}{9k+4}$ sogar divergiert. Konkret gibt es die divergenten Teilfolgen

$$a_{2k} = \frac{64^k}{18k+4} \rightarrow \infty, \quad k \rightarrow \infty, \quad a_{2k+1} = -\frac{64^k \cdot 8}{18k+13} \rightarrow -\infty, \quad k \rightarrow \infty.$$

(A4) Rechenregeln für komplexe Zahlen

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke so weit wie möglich. Geben Sie das Resultat in der kartesischen Form $z = x + iy$ an.

a) $(2+i) + (1-3i)$

e) $\frac{-1+3i}{1-i}$

b) $(2+i)(4-8i)$

f) $|(2-2i) + (5-4i)|$

c) $(1-4i)(1-3i)$

g) $\left| \frac{2-3i}{5+4i} \right|$

d) $\frac{1-2i}{2+i}$

h) $\overline{(3+4i)(-3i)}$

Wir erhalten

a) $3-2i$

e) $-2+i$

b) $16-12i$

f) $\sqrt{85}$

c) $-11-7i$

g) $\frac{1}{41}\sqrt{533}$

d) $-i$

h) $12+9i$

(A5) Eigenschaften Komplexer Zahlen

Beweisen Sie, dass die folgenden Eigenschaften für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gelten:

a) $z_1 z_2 = z_2 z_1$

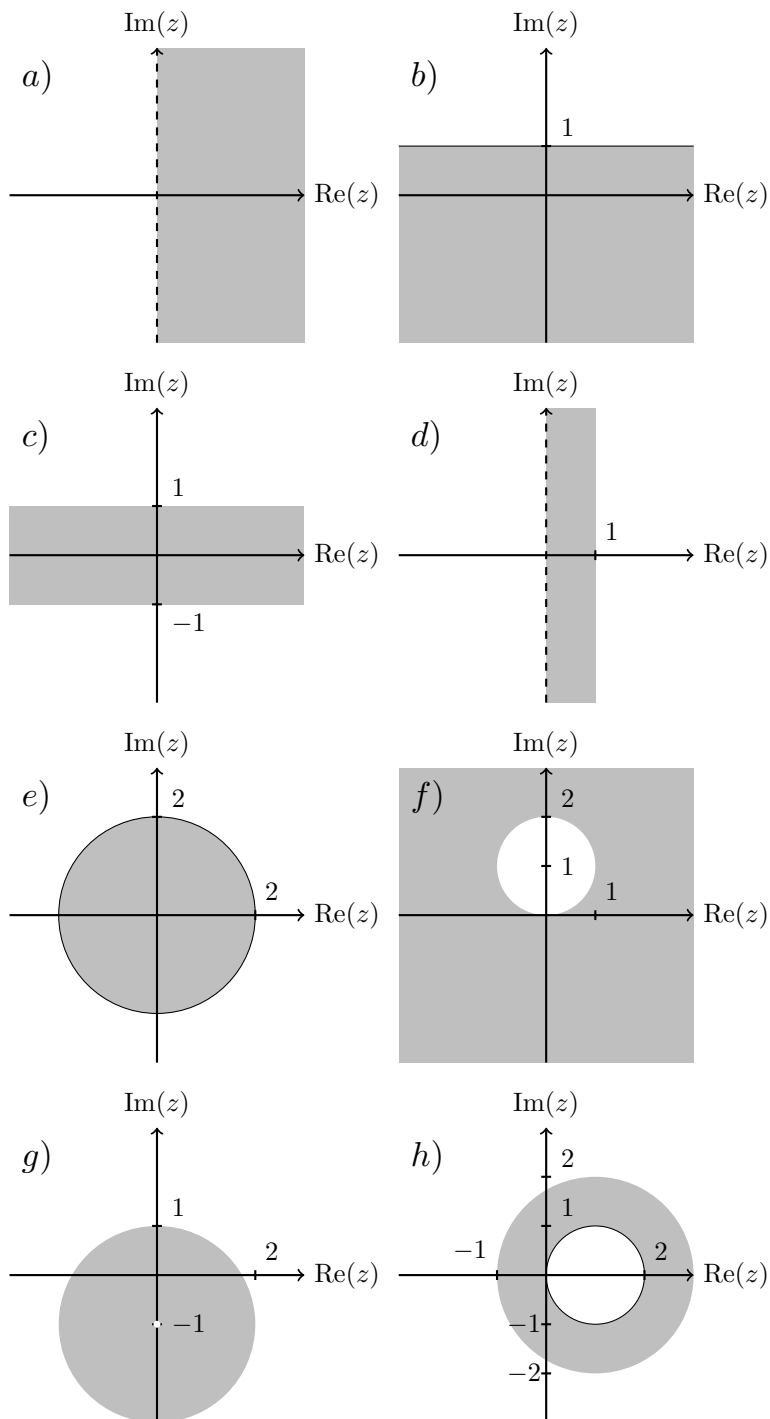
$$(x_1 - iy_1) \cdot (x_2 - iy_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2 - i(x_1 y_2 + y_1 x_2) = x_2 x_1 - y_2 y_1 - i(y_2 x_1 + x_2 y_1) = z_2 z_1$$

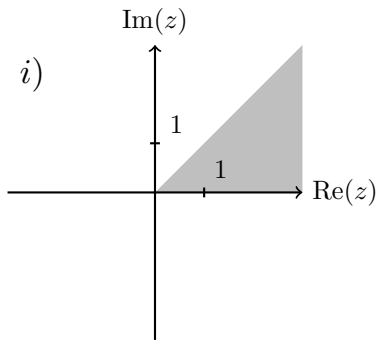
b) $(z_1 z_2)^{-1} = z_1^{-1} z_2^{-1}$

$$\begin{aligned} (z_1 z_2)^{-1} &= \frac{\overline{z_1 z_2}}{|z_1 z_2|^2} = \frac{x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)}{(x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)^2} \\ &= \frac{(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2)}{(x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)^2} \\ &= \frac{x_1 + iy_1}{x_1^2 + y_1^2} \cdot \frac{x_2 + iy_2}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{\overline{z_1}}{|z_1|^2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2} = z_1^{-1} z_2^{-1} \end{aligned}$$

(A6) Darstellung von komplexen Mengen

Im Folgenden bedeutet eine durchgezogene Linie, dass der Randwert enthalten ist. Kein Rand oder eine gestrichelte Linie bedeuten: nicht enthalten.





(A7) Reihe mit Parameterabhängigkeit

Bestimmen Sie die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\alpha^n}{\alpha^{2n} - 1}}_{=x_n}$$

in Abhängigkeit des Parameters $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha > 0, \alpha \neq 1$.

Verwenden Sie dazu das Wurzel-Kriterium und benutzen Sie, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\alpha^n + C} = \alpha \quad \forall C \in \mathbb{R}$, wenn $\alpha > 1$.

Das Wurzelkriterium besagt, dass wir zu einer gegebenen Folge (x_k) L betrachten können, wobei

$$L = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|x_k|}.$$

Wenn

$$L \begin{cases} < 1 & \text{dann konvergiert die Reihe } \sum_{k=0}^{\infty} x_k, \\ > 1 & \text{dann divergiert die Reihe } \sum_{k=0}^{\infty} x_k, \\ = 1 & \text{dann lässt sich nichts sagen über die Reihe } \sum_{k=0}^{\infty} x_k. \end{cases}$$

Sei $\alpha > 1$. Dann gilt

$$\sqrt[n]{|x_n|} = \sqrt[n]{\left| \frac{\alpha^n}{\alpha^{2n} - 1} \right|} = \sqrt[n]{\frac{\alpha^n}{\alpha^{2n} - 1}} = \frac{\sqrt[n]{\alpha^n}}{\sqrt[n]{(\alpha^n - 1)(\alpha^n + 1)}}$$

Der Limes davon existiert, und stimmt damit mit dem Limes Superior überein. Es gilt

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{\sqrt[n]{\alpha^n - 1} \sqrt[n]{\alpha^n + 1}} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\alpha^n - 1} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\alpha^n + 1}} \\ &\stackrel{*}{=} \frac{\alpha}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha} < 1. \end{aligned}$$

An der Stelle * verwenden wir die Aussage, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\alpha^n + C} = \alpha \quad \forall C \in \mathbb{R}$. Laut dem Wurzelkriterium konvergiert die Reihe absolut.

Sei nun $0 < \alpha < 1$. Wir definieren $\beta := \frac{1}{\alpha} > 1$ und sehen, dass

$$\frac{\alpha^n}{\alpha^{2n} - 1} = -\frac{\beta^n}{\beta^{2n} - 1}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^n}{\alpha^{2n} - 1} &= \frac{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{-n}}{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{-2n} - 1} = \frac{\frac{1}{\alpha^{-n}}}{\frac{1 - \alpha^{-2n}}{\alpha^{-2n}}} = \frac{\alpha^{-2n}}{\alpha^{-n}(1 - \alpha^{-2n})} \\ &= \frac{\alpha^{-n}}{1 - \alpha^{-2n}} = -\frac{\alpha^{-n}}{\alpha^{-2n} - 1} = -\frac{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n}{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2n} - 1} = -\frac{\beta^n}{\beta^{2n} - 1}. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\sqrt[n]{|x_n|} = \sqrt[n]{\left| -\frac{\beta^n}{\beta^{2n}-1} \right|} = \sqrt[n]{\frac{\beta^n}{\beta^{2n}-1}} = \frac{\sqrt[n]{\beta^n}}{\sqrt[n]{(\beta^n-1)(\beta^n+1)}}.$$

Der Limes existiert und stimmt daher mit dem Limes Superior überein. Es gilt

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta}{\sqrt[n]{\beta^n-1} \sqrt[n]{\beta^n+1}} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \beta}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\beta^n-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\beta^n+1}} \\ &\stackrel{*}{=} \frac{\beta}{\beta^2} = \frac{1}{\beta} = \alpha < 1. \end{aligned}$$

Laut dem Wurzelkriterium konvergiert die Reihe absolut.