

(A1) Multiple Choice

- a) (i) – wahr. Die Folge ist beschränkt und hat somit mindestens eine konvergente Teilfolge (Satz von Bolzano-Weierstrass).
- wahr. Es folgt direkt aus der ersten Aussage und $(x_n)^2 = (|x_n|)^2$, dass x_n^2 konvergiert. Somit gilt die Identität, da für jede konvergente Folge $(y_n)_n$ mit $y_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ gilt $\liminf_{n \rightarrow \infty} = \limsup_{n \rightarrow \infty} = y_0$.
- (ii) wahr. Eine Folge konvergiert genau dann, wenn alle Teilfolgen konvergieren.
- b) • falsch. Gegenbeispiel $x_{n+1} = (-1)^n 2x_n$.
- falsch. Gegenbeispiel, wenn gilt $x_n = -y_n$, dann $x_n + y_n = 0$
- falsch. x_n kann einen negativen Grenzwert haben, so dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = -\infty$.
- wahr. Rechenregeln für Grenzwerte: Division.
- c) wahr. Cauchy Folgen sind konvergent und somit beschränkt.
- d) divergiert. Wir betrachten die Partialsumme bis N :

$$S_N = \sum_{n=1}^N \left(\frac{n}{\sqrt{n+1}} - \frac{n+1}{\sqrt{n+1}+1} \right) \underset{\text{via Teleskopsumme}}{=} \frac{1}{2} - \frac{N+1}{\sqrt{N+1}+1}$$

Die Betrachtung des Grenzwerts $N \rightarrow \infty$ der Partialsumme ist dann äquivalent zum Grenzwert der Summe in der Angabe:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_N = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{N+1}{\sqrt{N+1}+1} \right) = -\infty$$

- e) falsch. Gegenbeispiel ist die *harmonische Reihe* mit $x_n = \frac{1}{n}$.
- f) falsch. Gegenbeispiel ist $x_n = -n$, $y_n = 0$.

(A2) Induktionsbeweise

Beweisen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion die folgenden Identitäten.

- a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt: $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

• **Induktionsanfang für $n = 1$:**

Korrekt, da $\sum_{k=1}^1 k^2 = 1 = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2+1)}{6}$.

• **Induktionsschritt:**

Annahme: Für n gilt $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Nun haben wir

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= (n+1)^2 + \sum_{k=1}^n k^2 = (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit zeigen Sie am besten in dem Sie das Polynom $(n+1)(n+2)(2n+3)$ ausmultiplizieren.

- b) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k} \right)^k = \frac{(n+1)^n}{n!}$$

- **Induktionsanfang für $n = 1$:**

Korrekt, da $\prod_{k=1}^1 \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2$ und gleichzeitig auch $\frac{(1+1)^1}{1!} = 2$.

- **Induktionsschritt:**

Annahme: Für n gilt $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \frac{(n+1)^n}{n!}$. Nun haben wir

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n+1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \\ &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \frac{(n+1)^n}{n!} \\ &= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \frac{(n+1)^n}{n!} = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)n!} \\ &= \frac{((n+1)+1)^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

c) (Bernoulli Ungleichung) Sei $x > -1$. Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(1+x)^n \geq (1+nx), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- **Induktionsanfang für $n = 0$:**

Korrekt, da $(1+x)^0 = 1 \geq 1 = (1+0 \cdot x)$.

- **Induktionsschritt:**

Annahme: Für n gilt $(1+x)^n \geq (1+nx)$. Nun haben wir

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)^n (1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \\ &\geq 1 + (n+1)x. \end{aligned}$$

(A3) Rekursive Folgen II

Die Folge (x_n) sei rekursiv definiert durch

$$x_{n+1} = \frac{8}{3}x_n - 6, \quad x_0 = 5.$$

Das Ziel dieser Aufgabe ist es zu bestimmen, ob diese Folge einen Grenzwert für $n \rightarrow \infty$ hat und falls ja, diesen Grenzwert auszurechnen.

a) Bestimmen Sie die reelle Zahl, welche als Grenzwert in Frage kommt.

Wir können die linke sowie die rechte Seite der Gleichung

$$x_{n+1} = \frac{8}{3}x_n - 6$$

je als Folge von reellen Zahlen auffassen, da die Folge x_n wohldefiniert ist. Wir definieren die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch $a_n = x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ und die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch $b_n = \frac{8}{3}x_n - 6 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Unter der Annahme, dass der Limes für (x_n) existiert, muss gelten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \stackrel{!}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{8}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - 6.$$

Lösen wir die Gleichung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{8}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - 6$$

nach $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ auf erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \frac{8}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -6 \Rightarrow -\frac{5}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -6 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{18}{5}.$$

b) Zeigen Sie per Induktion, dass 5 eine untere Schranke der Folge ist.

Wir führen den Beweis per Induktion durch:

- *Induktionsverankerung* für $n = 0$ Korrekt, da $x_0 = 5 \geq 5$.
- *Induktionsschritt* Wir nehmen an, dass die Annahme gilt für n , d.h. $x_n \geq 5$, und wollen daraus schliessen, dass die Annahme auch für x_{n+1} gilt, d.h. $x_{n+1} \geq 5$.

$$x_{n+1} = \frac{8}{3} \underbrace{x_n}_{\geq 5} - 6 \geq \frac{8}{3} * 5 - 6 = \frac{22}{3} \geq 5.$$

- c) Entscheiden Sie nun, ob die Folge einen Grenzwert hat oder nicht, und wie dieser evtl. lautet.

Die Folge konvergiert nicht, da der einzige Kandidat für einen Grenzwert $\frac{18}{5}$ ist. Dies ist jedoch kleiner als die untere Schranke 5, welche wir in (b) angegeben haben.

(A4) Reihen

a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+3}$

Die Reihe divergiert. Falls die aus der Folge (x_k) gebildete Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ konvergiert, so gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$. Hier konvergiert aber die Folge $x_k = (-1)^k \frac{k}{k+3}$ nicht gegen 0, uns somit divergiert die daraus gebildete Reihe.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\sqrt{n+4} - \sqrt{n+2}}{n}}_{x_n}$

Die Reihe konvergiert. Wir wenden das Majorantenkriterium an. Wenn zu zwei Folgen (x_n) und (y_n) ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$0 \leq |x_n| < y_n,$$

für alle $n \geq N$, dann folgt aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$.

Es gilt

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{\sqrt{n+4} - \sqrt{n+2}}{n} \\ &= \frac{(\sqrt{n+4} - \sqrt{n+2})(\sqrt{n+4} + \sqrt{n+2})}{n(\sqrt{n+4} + \sqrt{n+2})} = \frac{2}{n(\sqrt{n+4} + \sqrt{n+2})} \end{aligned}$$

Um nun das Majorantenkriterium anzuwenden, betrachten wir

$$|x_n| = \frac{2}{n(\sqrt{n+4} + \sqrt{n+2})} \leq \frac{2}{n(2\sqrt{n})} = \frac{1}{\underbrace{n^{\frac{3}{2}}}_{y_n}}.$$

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ konvergiert, und folglich auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$.

c) $\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{\sin(2n^2)}{n^2+3}}_{x_n}$

Die Reihe konvergiert. Wir wenden wieder das Majorantenkriterium an. Es gilt

$$|x_n| = \frac{\sin(2n^2)}{n^2+3} \leq \frac{1}{n^2+3} \leq \frac{1}{\underbrace{n^2}_{y_n}}.$$

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ konvergiert, und folglich auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$.

$$\text{d) } \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n(n^2+3)}}}_{x_n}$$

Die Reihe konvergiert. Wir wenden wieder das Majorantenkriterium an. Es gilt

$$|x_n| = \frac{1}{\sqrt{n^3+3n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \underbrace{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}_{y_n}.$$

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ konvergiert, und folglich auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$.

$$\text{e) } \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\sqrt{n^5}}{n^3+1}}_{y_n}$$

Die Reihe divergiert. Wir wenden das Majorantenkriterium an, suchen aber in diesem Fall eine Folge (x_n) so dass

$$0 \leq |x_n| \leq y_n.$$

Aus der Divergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ folgt die Divergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$. Es gilt

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{\sqrt{n^5}}{n^3+1} = \frac{n^{\frac{5}{2}}}{n^3+1} \geq \frac{n^{\frac{5}{2}}}{n^3+n^3} = \frac{1}{2} \frac{n^{\frac{5}{2}}}{n^3} = \frac{1}{2} n^{\frac{5}{2}-3} \\ &= \frac{1}{2} n^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \stackrel{*}{\geq} \underbrace{\frac{1}{n}}_{x_n}. \end{aligned}$$

Die Ungleichung $*$ gilt für alle $n \geq 4$. Da die harmonische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ divergiert, divergiert auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$.