Musterlösung 3 – Analyse I (Allemand)

Herbst/Winter '24
Prof. J. Krieger
T. Schmid

(A1) Multiple Choice

a) falsch. Gegenbeispiel $x_n = (-1)^n$

b) (x_n) konvergiert (siehe Grenzwert), $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = 1$.

c) konv. gegen 1. (Quotient konvergenter Folgen)

d)
- wahr. Die Folge $y_n = |x_n|$ mit $y_{n+1} < y_n$ konvergiert nach dem Monotoniekriterium.
- falsch. Gegenbeispiel: $x_n = (-\frac{1}{n})^n + (-1)^n$.

e)
- wahr. Der Absolutwert konvergiert nur für beschränkte Folgen.
- falsch. Gegenbeispiel $x_n = y_n = n$

(A2) Beschränktheit und Grenzwerte

Entscheide ob diese Folgen beschränkt sind. Gib eine obere oder untere Schranke an, sofern eine derartige existiert:

a) $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2^n}$

ist beschränkt, denn wir haben

$$x_n = \begin{cases} \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} & n \text{ gerade,} \\ 0 & n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

dh. die Folgeglieder für n gerade fallen monoton gegen 0 und die Folgeglieder für n ungerade sind konstant 0. Wir haben

$$0 \le x_n \le 2.$$

b) $x_n = \frac{n^2+2}{n+1}$

Es gibt keine obere Schranke, denn die Folge x_n strebt gegen $+\infty$ für $n \to \infty$. Eine untere Schranke ist gegeben durch $a_1 = \frac{3}{2}$. Für $n \ge 1$ ist die Folge streng monoton wachsend:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{(n+1)^2+2}{(n+1)+1} - \frac{n^2+2}{n+1} = \frac{n^2+3n-1}{(n+2)(n+1)} > 0, \quad n > 1.$$

Entscheide, ob nachstehende Folgen einen Grenzwert haben für $n \to \infty$. Falls ja, gib ihn an.

c) $x_n = \frac{4^n+(-4)^n}{2^n}$

Nein, die Folge hat keinen Grenzwert, denn

$$x_n = \begin{cases} \frac{2\cdot 4^n}{2^n} = \frac{2^{2n+1}}{2^n} = 2^{n+1} & n \text{ gerade,} \\ 0 & n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

dh. die Folgeglieder für n gerade sind nicht beschränkt, und die Folgeglieder für n ungerade sind konstant 0, weshalb kein Grenzwert der Folge existiert.

d) $x_n = -\frac{1}{3}\frac{15n^3-2}{n^3}$

Ja, die Folge konvergiert:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n^3(15-2n^{-3})}{n^3} = -\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}(15-2n^{-3}) = -\frac{1}{3} * 15 = -5$$

e) $x_n = 2^{1+(-1)^n}$

Nein, die Folge besitzt keinen Grenzwert, denn

$$x_n = \begin{cases} 2^2 = 4 & n \text{ gerade,} \\ 2^0 = 1 & n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

dh. für n gerade erhalten wir 4 als Wert der Folge und für n ungerade erhalten wir 1. Die Folge kann nicht konvergieren, denn sie springt zwischen diesen Werten hin und her.

(A3) Grenzwerte II

Berechnen Sie die Grenzwerte dieser Folgen für $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\},\ n \to \infty$:

a) $x_n = \dfrac{2^n(n+1)}{n!}$

Wir betrachten die Folge (q_n) der Quotienten, $q_n = \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|$, und nehmen an, dass diese Folge (q_n) gegen q_∞ konvergiert. Wenn

$$q_\infty \begin{cases} < 1 & \text{dann konvergiert } (x_n) \text{ gegen } 0, \\ > 1 & \text{dann divergiert } (x_n), \\ = 1 & \text{dann lässt sich nichts sagen über } (x_n). \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{\frac{2^{n+1}(n+2)}{(n+1)!}}{\frac{2^n(n+1)}{n!}} = \frac{2^{n+1}(n+2)n!}{2^n(n+1)(n+1)!} = \frac{2^n 2(n+2)n!}{2^n(n+1)n!(n+1)} \\ &= \frac{2(n+2)}{(n+1)^2} = \frac{2n+4}{n^2+2n+1} = \frac{n^2(2n^{-1}+4n^{-2})}{n^2(1+2n^{-1}+n^{-2})} \end{aligned}$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^{-1}+4n^{-2}}{1+2n^{-1}+n^{-2}} = \frac{0}{1} = 0 < 1$$

Daher konvergiert (x_n) gegen 0.

b) $x_n = \frac{n^n}{n!}$

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^{n+1}n!}{n^n(n+1)!} = \frac{(n+1)^n(n+1)n!}{n^n n!(n+1)} \\ &= \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \end{aligned}$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x_n+1}{x_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} \textit{ (die Eulersche Zahl)} > 1$$

Somit divergiert (x_n).

c) $x_n = \dfrac{n+1}{(n+2)^2}$

$$0 \ \le\ \frac{n+1}{(n+2)^2} \ \le\ \frac{n+1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n+1}$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty} 0 \ \le\ \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{(n+2)^2} \ \le\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow 0 \ \le\ \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{(n+2)^2} \ \le\ 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{(n+2)^2} = 0$$

d) $x_n = \dfrac{1+\sqrt{n}+n}{(1+n)\sqrt{3+n}}$

$$0 \leq \frac{1+\sqrt{n}+n}{(1+n)\sqrt{3+n}} \leq \frac{1+n+n}{(1+n)\sqrt{3+n}} \leq \frac{2(1+n)}{(1+n)\sqrt{3+n}} = \frac{2}{\sqrt{3+n}} \leq \frac{2}{\sqrt{n}}$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty} 0 \;\leq\; \lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{n}+n}{(1+n)\sqrt{3+n}} \;\leq\; \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow\; 0 \;\leq\; \lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{n}+n}{(1+n)\sqrt{3+n}} \;\leq\; 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

e) $x_n = \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^n$

Mit der Bernoulli-Ungleichung für $x = -\frac{1}{n^2} \geq -1$ folgt

$$1 \geq \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 - n\frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty} 1 \;\geq\; \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \;\geq\; \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow\; 1 \;\geq\; \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \;\geq\; 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 1.$$

(A4) Rekursive Folgen

Zunächst bestimmen wir welcher Wert als Grenzwert in Frage kommen würde. Es muss gelten $x_\infty = x_\infty(2-x_\infty)$. Diese Gleichung besitzt die Lösungen $x_\infty = 0$ und $x_\infty = 1$.

Im Folgenden zeigen wir, dass die Folge monoton steigt und nach oben durch 1 beschränkt ist. Daraus folgt die Konvergenz.

Induktionsanfang: $x_0 \leq 1$ und $x_0 \leq x_1$.

Induktionsschritt: Wir nehmen an dass $x_n \leq 1$ und $x_{n-1} \leq x_n$.

Zur Beschränktheit: Es gilt $x_{n+1} = x_n(2 - x_n) = 2x_n - x_n^2$. Wir fragen uns ob $2x_n - x_n^2 - 1 \leq 0$. Das gilt, da $-x_n^2 + 2x_n - 1 = -(x_n - 1)^2 \leq 0$ nach Induktionsannahme.

Zur Monotonie: Es gilt $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{x_n(2-x_n)}{x_n} = 2-x_n$. Auf Grund der Beschränktheit ist $2 - x_n$ grösser gleich 1. Damit ist die Folge monoton steigend.

Aus Monotonie und Beschränktheit folgt die Konvergenz.