

(A1) Multiple Choice

Herbst/Winter '24

Prof. J. Krieger

T. Schmid

- a) Es werden die Aussagen aufgelistet, die wahr sind. Die anderen jeweiligen Aussagen sind dann falsch.
- 10 ist Maximum von Ω
 - 2 ist untere Schranke von Ω
 - Ω ist beschränkt
 - 2 ist Infimum von Ω
- b)
- 10 ist obere Schranke Ω
 - 5 ist Supremum von Ω
 - Ω ist nach unten beschränkt
- c)
- 4 ist das Maximum
 - π ist Infimum von Ω aber kein Minimum
- d)
- wahr da $\inf(A)$ eine untere und $\sup(A)$ eine obere Schranke liefert.
 - falsch, z.B. $[-1, 0) \cup (1, 2]$
 - falsch, z.B. $(-1, 0] \cup [1, 2)$
 - wahr, denn angenommen z. B. $\inf(A) \in A$. Dann gibt es aber nach Definition des Infimum kein $\delta > 0$ so, dass $(\inf(A) - \delta, \inf(A) + \delta) \subset A$. Sonst gäbe es ein $x \in A$ mit $x < \inf(A)$. Dass es kein solches $\delta > 0$ für ein Element in A gibt widerspricht aber der Offenheit von A .
 - wahr, denn angenommen z. B. $\inf(A) \notin A$, aber $\in \mathbb{R}$ da A beschränkt ist. Da A abgeschlossen ist, ist A^C das Mengenkomplement offen. Dann gibt es aber nach Definition des Infimum ein $\delta > 0$ so, dass $(\inf(A) - \delta, \inf(A) + \delta) \subset A^C$. Dann ist aber jedes $x \in A^C$ im vorherigen Intervall mit $x > \inf(A)$ eine grössere untere Schranke für A . Ein Widerspruch zur Definition des Infimums.

(A2) Infimum und Supremum

Bestimme für die Menge Ω das Infimum, Supremum, Maximum und Minimum, falls sie existieren.

a) $\Omega = [1, 50[$

$$\inf \Omega = \min \Omega = 1, \sup \Omega = 50, \max \text{ existiert nicht.}$$

b) $\Omega =]1, \infty[$

$$\inf \Omega = 1, \min \text{ existiert nicht. } \sup \Omega = \infty, \max \text{ existiert nicht.}$$

c) $\Omega =]3, 5] \cup [3, 10]$

$$\inf \Omega = \min \Omega = 3, \sup \Omega = \max \Omega = 10$$

d) $\Omega = [-10, 5] \cap]2, 10]$

$$\inf \Omega = 2, \min \text{ existiert nicht. } \sup \Omega = \max \Omega = 5.$$

e) $\Omega = \{p^{-1} \mid p \text{ ist Primzahl}\}$

$$\inf \Omega = 0, \min \text{ existiert nicht. } \sup \Omega = \max \Omega = \frac{1}{2}$$

Bemerkung: die kleinste Primzahl ist 2. Es gibt unendlich viele Primzahlen (Satz von Euklid). Daher geht p^{-1} nach Null für beliebig große p .

f) $\Omega = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots \right\}$

$$\inf \Omega = \min \Omega = \frac{1}{2}, \sup \Omega = 1, \max \text{ existiert nicht.}$$

g) $\Omega = \{x \in \mathbb{R} \mid x + x^2 < 6\}$

$$\inf \Omega = -3, \min \text{ existiert nicht. } \sup \Omega = 2, \max \text{ existiert nicht.}$$

Bemerkung: Die Nullstellen von $x + x^2 - 6$ sind -3 und 2 .

h) $\Omega = \{\sin(x) \mid x \in \mathbb{R}, 0 \leq x < \pi/2\}$

$$\inf \Omega = \min \Omega = 0, \sup \Omega = 1, \max \text{ existiert nicht.}$$

(A3) Etwas zum Betrag ...

Zeigen Sie, dass für zwei reelle Zahlen x, y gilt:

a) $|xy| = |x||y|$

$$\Leftrightarrow |xy|^2 = (|x||y|)^2 \Leftrightarrow (xy)^2 = |x|^2|y|^2 \Leftrightarrow x^2y^2 = x^2y^2.$$

Bemerkung: Da beide Seiten der Gleichung positiv sind, ist Quadrieren eine Äquivalenzumformung und die „ $\Leftrightarrow$ “ sind gerechtfertigt. Im Allgemeinen gilt dies nicht!

b) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (*Dreiecksungleichung*)

$$\begin{aligned} |x + y| &\leq |x| + |y| \\ \Leftrightarrow |x + y|^2 &\leq (|x| + |y|)^2 \\ \Leftrightarrow (x + y)^2 &\leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 \\ \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 &\leq x^2 + 2|xy| + y^2 \\ \Leftrightarrow xy &\leq |xy|. \end{aligned}$$

Bemerkung: Da beide Seiten der Gleichung positiv sind, ist Quadrieren eine Äquivalenzumformung und die „ $\Leftrightarrow$ “ sind gerechtfertigt.

c) $||a| - |b|| \leq |a - b|$

$$\begin{aligned} ||a| - |b|| &\leq |a - b| \\ \Leftrightarrow (|a| - |b|)^2 &\leq (a - b)^2 \\ \Leftrightarrow |a|^2 - 2|a||b| + |b|^2 &\leq a^2 - 2ab + b^2 \\ \Leftrightarrow a^2 - 2|ab| + b^2 &\leq a^2 - 2ab + b^2 \\ \Leftrightarrow -|ab| &\leq -ab. \\ \Leftrightarrow |ab| &\geq ab. \end{aligned}$$

Falls $ab \geq 0$ gilt Gleichheit, falls $ab < 0$ ist $|ab|$ immer größer als ab .

Bemerkung: Da beide Seiten der Gleichung positiv sind, ist Quadrieren eine Äquivalenzumformung und die „ $\Leftrightarrow$ “ sind gerechtfertigt.

d) $\min(x, y) = \frac{x+y-|y-x|}{2}$

Falls $x \leq y$, dann $\min(x, y) = x$ und $\frac{x+y-|y-x|}{2} = \frac{x+y-y+x}{2} = x$. Falls $x > y$, dann $\min(x, y) = y$ und $\frac{x+y-|y-x|}{2} = \frac{x+y+y-x}{2} = y$.

e) $\max(x, y) = \frac{x+y+|y-x|}{2}$

Falls $x \geq y$, dann $\max(x, y) = x$ und $\frac{x+y+|y-x|}{2} = \frac{x+y-y+x}{2} = x$. Falls $x < y$, dann $\max(x, y) = y$ und $\frac{x+y+|y-x|}{2} = \frac{x+y+y-x}{2} = y$.

(A4) Definition der Konvergenz

Sei $\varepsilon > 0$ (beliebig aber fest). Es gilt $|0 - x_n| \leq \varepsilon$ für alle x_n mit $n \geq \varepsilon^{-2}$, da

$$\left|0 - \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right| = \left|\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right| \leq \varepsilon \iff \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = \frac{1}{n} \leq \varepsilon^2 \iff n \geq \varepsilon^{-2}.$$

Wir wählen $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $N_\varepsilon \geq \varepsilon^{-2}$. Für dieses N_ε gilt $|0 - x_n| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$. Wir finden ein solches N_ε für jedes beliebige $\varepsilon > 0$.

Damit ist für alle $\varepsilon > 0$ bewiesen, dass ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, für das die Ungleichung $|0 - x_n| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$ erfüllt ist, existiert. $\Rightarrow$ Die Folge konvergiert gegen 0.

(A5) Grenzwerte

Berechne die Grenzwerte dieser Folgen für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $n \rightarrow \infty$:

a) $x_n = \frac{4n^2 + 2n - 5}{n(n-7)}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(4 + 2n^{-1} - 5n^{-2})}{n^2(1 - 7n^{-1})} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty}(4 + 2n^{-1} - 5n^{-2})}{\lim_{n \rightarrow \infty}(1 - 7n^{-1})} = \frac{4}{1} = 4$$

b) $x_n = \frac{-9n^4 + n - 7}{n^2(2n^3 - n^2 - 2n - 3)}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5(-9n^{-1} + n^{-4} - 7n^{-5})}{n^5(2 - n^{-1} - 2n^{-2} - 3n^{-3})} = 0$$

c) $x_n = \frac{\sqrt{n^4 + 4n^3 + 6}}{2n^2 - 1} = \frac{\sqrt{n^4 + 4n^3 + 6}}{\sqrt{(2n^2 - 1)^2}} = \sqrt{\frac{n^4 + 4n^3 + 6}{4n^4 - 4n^2 + 1}}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n^4 + 4n^3 + 6}{4n^4 - 4n^2 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n^4(1 + 4n^{-1} + 6n^{-4})}{n^4(4 - 4n^{-2} + n^{-4})}} \\ &= \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4(1 + 4n^{-1} + 6n^{-4})}{n^4(4 - 4n^{-2} + n^{-4})}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} x_n &= \sqrt{8n^2 + n + 4} - 2\sqrt{2n^2 - 1} = \frac{(\sqrt{8n^2 + n + 4} - 2\sqrt{2n^2 - 1})(\sqrt{8n^2 + n + 4} + 2\sqrt{2n^2 - 1})}{\sqrt{8n^2 + n + 4} + 2\sqrt{2n^2 - 1}} \\ &= \frac{(\sqrt{8n^2 + n + 4})^2 - 4(2n^2 - 1)^2}{\sqrt{8n^2 + n + 4} + 2\sqrt{2n^2 - 1}} = \frac{8n^2 + n + 4 - 8n^2 + 4}{\sqrt{8n^2 + n + 4} + 2\sqrt{2n^2 - 1}} \\ &= \frac{n + 8}{\sqrt{8n^2 + n + 4} + 2\sqrt{2n^2 - 1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 8}{\sqrt{n^2(8 + n^{-1} + 4n^{-2})} + 2\sqrt{n^2(2 - n^{-2})}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(1 + 8n^{-1})}{n(\sqrt{8 + n^{-1} + 4n^{-2}} + 2\sqrt{2 - n^{-2}})} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty}(1 + 8n^{-1})}{\sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty}(8 + n^{-1} + 4n^{-2})} + 2\sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty}(2 - n^{-2})}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{8} + 2\sqrt{2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8} \end{aligned}$$

e) $x_n = \prod_{k=2}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)$

Wir schreiben das Produkt aus („Teleskop-Produkt“):

$$x_n = \prod_{k=2}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^n \frac{k+1}{k} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2}$$

und somit divergiert (x_n) .