

(A1) Anwendungen der Integralrechnung

Herbst/Winter '24

Prof. J. Krieger

T. Schmid

a) Wir beschreiben die Vase durch Rotation der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \exp(-4x) & \text{für } x \in [0, \frac{3}{4}], \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \exp(-3) & \text{für } x \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

Wieviele Liter passen in die Vase, wenn sie bis zu einer Höhe von 0.75 dm gefüllt wird? (Alle Zahlenwerte sind in Dezimetern angegeben. $1 \text{ dm}^3 \hat{=} 1 \text{ l}$).

Das Volumen des Rotationskörpers bis zu einer Höhe von 0.75 dm ist gegeben durch:

$$V = \pi \int_0^{\frac{3}{4}} f(x)^2 dx = \pi \int_0^{\frac{3}{4}} (\sqrt{x} \exp(-4x))^2 dx = \pi \int_0^{\frac{3}{4}} x \exp(-8x) dx.$$

Mit partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x}_{u(x)} \underbrace{\exp(-8x)}_{v'(x)} dx &= u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx \text{ mit } u'(x) = 1, v(x) = -\frac{1}{8} \exp(-8x) \\ &= -\frac{1}{8} x \exp(-8x) + \frac{1}{8} \int \exp(-8x) dx \\ &= -\frac{1}{8} x \exp(-8x) - \frac{1}{64} \exp(-8x) \\ &= -\frac{1}{64} \exp(-8x) (8x + 1). \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{3}{4}} x \exp(-8x) dx = -\pi \frac{1}{64} \exp(-8x) (8x + 1) \Big|_0^{\frac{3}{4}} \\ &= -\pi \frac{1}{64} (\exp(-6) \cdot 7 - 1) \approx 0.04824 \end{aligned}$$

Somit passen in die Vase ungefähr 50 ml.

b) Passend zur Vase möchte Rosi eine blumenförmige Unterlage basteln. Sie hat dazu bereits aus Stoff die folgende Kurve $\gamma(t)$ ausgeschnitten:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 9 \cos(t) + \cos(9t) \\ 9 \sin(t) + \sin(9t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Wir berechnen die Bogenlänge der durch $\gamma(t)$ gegebenen Kurve, gegeben durch

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Wir berechnen zunächst die Ableitungen $x'(t)$ sowie $y'(t)$

$$\begin{aligned} x'(t) &= -\frac{9}{8}(\sin(t) + \sin(9t)) \\ y'(t) &= \frac{9}{8}(\cos(t) + \cos(9t)). \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} x'(t)^2 + y'(t)^2 &= \frac{81}{64} (\sin^2(t) + 2 \sin(t) \sin(9t) + \sin^2(9t) + \cos^2(t) + 2 \cos(t) \cos(9t) + \cos^2(9t)) \\ &= \frac{81}{64} (2 + 2 \sin(t) \sin(9t) + 2 \cos(t) \cos(9t)). \end{aligned}$$

Aus den trigonometrischen Identitäten erhalten wir

$$2 \sin(t) \sin(9t) = \cos(t - 9t) - \cos(t + 9t) = \cos(-8t) - \cos(10t) = \cos(8t) - \cos(10t)$$

$$2 \cos(t) \cos(9t) = \cos(t - 9t) + \cos(t + 9t) = \cos(8t) + \cos(10t).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} x'(t)^2 + y'(t)^2 &= \frac{81}{64} (2 + 2 \sin(t) \sin(9t) + 2 \cos(t) \cos(9t)) \\ &= \frac{81}{64} (2 + \cos(8t) - \cos(10t) + \cos(8t) + \cos(10t)) \\ &= 2 \frac{81}{64} (1 + \cos(8t)). \end{aligned}$$

Das Bogenlängenintegral reduziert sich also auf

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{2 \frac{81}{64} (1 + \cos(8t))} dt = \sqrt{2} \frac{9}{8} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos(8t)} dt.$$

Mit dem Tipp erhalten wir $1 + \cos(8t) = 2 \cos^2(4t)$, und somit

$$\Rightarrow \sqrt{2} \frac{9}{8} \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \cos^2(4t)} dt = \frac{18}{8} \int_0^{2\pi} |\cos(4t)| dt$$

Beachte, dass wir die Betragsstriche NICHT weglassen können, da der $\cos(4t)$ auch regelmässig kleiner Null wird. Mit den Betragsstrichen können wir aber nur schlecht integrieren, so dass wir stattdessen das Integrationsintervall aufteilen anhand der Nullstellen von $\cos(4t)$ im Intervall $[0, 2\pi]$,

$$\left[0, \frac{\pi}{8}\right], \left[\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right], \left[\frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}\right], \dots, \left[\frac{13\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}\right], \left[\frac{15\pi}{8}, 2\pi\right].$$

Wir haben also jeweils Teilstücke der Länge $\pi/4$, nur am Anfang und am Ende haben wir nur ein halbes Teilstück. Die Funktion ist 2π -periodisch und besteht aus 8 gleichen Teilen. Daher reicht es, wenn wir nur ein einziges Teilintegral bestimmen und dies dann mal 8 rechnen,

$$\begin{aligned} l &= \frac{18}{8} \int_0^{2\pi} |\cos(4t)| dt = 8 \cdot \frac{18}{8} \int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} \cos(4t) dt \\ &= 8 \cdot \frac{18}{8} \cdot \frac{1}{4} (\sin(4t)) \Big|_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} = 8 \cdot \frac{18}{8} \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 = 9. \end{aligned}$$

Somit braucht Rosi genau 9 dm Band und die vorhandenen 1 Meter reichen ihr also aus.

(A2) Gemischte Aufgaben

Entscheiden Sie selbst, welche Herangehensweise am sinnvollsten ist.

a) $\int e^{-x} \cos(5x) dx$

Wir berechnen die Stammfunktion mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \int \underbrace{e^{-x}}_{v'(x)} \underbrace{\cos(5x)}_{u(x)} dx &= u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) \quad \text{mit } u'(x) = -5 \sin(5x), v(x) = -e^{-x} \\ &= -e^{-x} \cos(5x) - 5 \int \underbrace{e^{-x}}_{s'(x)} \underbrace{\sin(5x)}_{t(x)} dx \\ &= -e^{-x} \cos(5x) - 5 \left(s(x)t(x) - \int s(x)t'(x) dx \right) \\ \text{mit } s(x) &= -e^{-x}, t'(x) = 5 \cos(5x) \\ &= -e^{-x} \cos(5x) - 5 \left(-e^{-x} \sin(5x) + 5 \int e^{-x} \cos(5x) dx \right) \\ &= -e^{-x} \cos(5x) + 5e^{-x} \sin(5x) - 25 \int e^{-x} \cos(5x) dx \end{aligned}$$

$$26 \int e^{-x} \cos(5x) dx = -e^{-x} \cos(5x) + 5e^{-x} \sin(5x) + C$$

$$\Leftrightarrow \int e^{-x} \cos(5x) dx = \frac{1}{26} e^{-x} (5 \sin(5x) - \cos(5x)) + C$$

b) $\int 2\sqrt{4-x^2} dx$

Wir betrachten das Integral

$$\int 2\sqrt{4-x^2} dx = \int f(x) dx$$

für $f(x) = 2\sqrt{4-x^2}$. Laut der Substitutionsregel können wir dieses Integral auch berechnen mittels

$$\int f(x) dx = \int f(\phi(t))\phi'(t) dt,$$

für eine geeignete Funktion $\phi(t) = x$. Wir wählen $\phi(t) = 2 \sin(t) \Rightarrow \phi'(t) = 2 \cos(t)$. Damit ist

$$\begin{aligned} \int 2\sqrt{4-x^2} dx &= \int f(x) dx = \int f(\phi(t))\phi'(t) dt \\ &= \int 2\sqrt{4-(2\sin(t))^2} 2\cos(t) dt \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \int \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos(t) dt \\ &= 8 \int \sqrt{\cos^2(t)} \cos(t) dt = 8 \int \cos^2(t) dt \\ &\stackrel{*}{=} 8 \cdot \frac{1}{2} (\cos(t) \sin(t) + t) + C \\ &\stackrel{**}{=} 4 \left(\underbrace{\cos\left(\operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right)\right)}_{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} \underbrace{\sin\left(\operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right)\right)}_{\frac{x}{2}} + \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right) \right) + C \\ &= x\sqrt{4-x^2} + \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right) + C + C \end{aligned}$$

An der Stelle * lässt sich das Integral von $\cos^2(t)$ mit partieller Integration ermitteln. An der Stelle ** machen wir die Rücksubstitution mit $x = 2 \sin(t) \Leftrightarrow t = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right)$. Als letztes bemerken wir noch, dass sich $\cos\left(\operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$ mittels der Identität $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ herleiten lässt.

c) $\int_0^{\log(3)} 8 \operatorname{ch}^2(x) dx$

Mit $\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ gilt

$$\begin{aligned} \int_0^{\log(3)} 8 \operatorname{ch}^2(x) dx &= \int_0^{\log(3)} 8 \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} dx \\ &= 2 \int_0^{\log(3)} e^{2x} + e^{-2x} + 2 dx \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} e^{-2x} + 2x \right) \Big|_0^{\log(3)} \\ &= (e^{2x} - e^{-2x} + 4x) \Big|_0^{\log(3)} \\ &= 3^2 - 3^{-2} + 4 \log(3) + 1 - 1 = \frac{80}{9} + 4 \log(3) \end{aligned}$$

d) $\int \frac{1}{\operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}(x)} dx$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}(x)} dx &= \int \frac{\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}(x)} dx \\
&= \int \frac{\operatorname{ch}^2(x)}{\operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}(x)} dx - \int \frac{\operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}(x)} dx \\
&= \int \frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)} dx - \int \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} dx \\
&= \log |\operatorname{sh}(x)| - \log |\operatorname{ch}(x)| + C \\
&= \log \left| \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} \right| + C
\end{aligned}$$

e) $\int \frac{x^3}{x^2 + 4x + 8} dx$

Polynomdivision von Zähler durch Nenner ergibt

$$(x^3) : (x^2 + 4x + 8) = x - 4 + 4 \frac{2x + 8}{x^2 + 4x + 8}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3}{x^2 + 4x + 8} dx &= \int x dx - \int 4 dx + \int \frac{8x + 32}{x^2 + 4x + 8} dx \\
&= \frac{1}{2} x^2 - 4x + \int \frac{8x + 16}{x^2 + 4x + 8} dx + \int \frac{16}{x^2 + 4x + 8} dx + C \\
&= \frac{1}{2} x^2 - 4x + 4 \int \frac{2x + 4}{x^2 + 4x + 8} dx + 16 \int \frac{1}{(x+2)^2 + 4} dx + C \\
&= \frac{1}{2} x^2 - 4x + 4 \log |x^2 + 4x + 8| + 8 \operatorname{Arctg} \left(\frac{x+2}{2} \right) + C,
\end{aligned}$$

wobei sich das Integral $16 \int \frac{1}{(x+2)^2 + 4} dx$ mittels Substitutionsregel ermitteln lässt.

f) $\int \frac{t^2}{\sqrt{1-5t^3}} dt$

Das Integral ist von der Form

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{1-5t^3}} dt = \frac{1}{15} \int \frac{1}{\sqrt{1-5t^3}} 15t^2 = \frac{1}{15} \int f(\phi(t)) \phi'(t) dt,$$

für $\phi(t) = 5t^3 \Rightarrow \phi'(t) = 15t^2$ und $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t}}$. Wir substituieren $x = \phi(t)$ und erhalten mit der Substitutionsregel

$$\begin{aligned}
\int \frac{t^2}{\sqrt{1-5t^3}} dt &= \frac{1}{15} \int f(\phi(t)) \phi'(t) dt = \frac{1}{15} \int f(x) dx \\
&= \frac{1}{15} \int \frac{1}{\sqrt{1-x}} = -\frac{2}{15} \sqrt{1-x} = \frac{2}{15} \sqrt{1-5t^3} + C
\end{aligned}$$

g) $\int \sin^4(x) \cos(x) dx$

Mit partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{\sin^4(x)}_{u(x)} \underbrace{\cos(x)}_{v'(x)} dx &= u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx \\
&\text{mit } u'(x) = 4 \sin^3(x) \cos(x), v(x) = \sin(x) \\
&= \sin^5(x) - \int 4 \sin^4(x) \cos(x) dx
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$5 \int \sin^4(x) \cos(x) dx = \sin^5(x) + C \Rightarrow \int \sin^4(x) \cos(x) dx = \frac{1}{5} \sin^5(x) + C.$$

$$h) \int \frac{\sin(t) \cos(t)}{1 + \sin^2(t)} dt$$

Das Integral ist von der Form

$$\int \frac{\sin(t) \cos(t)}{1 + \sin^2(t)} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1 + \sin^2(t)} 2 \sin(t) \cos(t) dt = \frac{1}{2} \int f(\phi(t)) \phi'(t) dt,$$

für $\phi(t) = 1 + \sin^2(t) \Rightarrow \phi'(t) = 2 \sin(t) \cos(t)$ und $f(t) = \frac{1}{t}$. Wir substituieren $x = \phi(t)$ und erhalten mit der Substitutionsregel

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin(t) \cos(t)}{1 + \sin^2(t)} dt &= \frac{1}{2} \int f(\phi(t)) \phi'(t) dt = \frac{1}{2} \int f(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} \log |x| + C \\ &= \frac{1}{2} \log |1 + \sin^2(t)| + C \end{aligned}$$

$$i) \int (x^2 + 2x) \operatorname{sh} \left(\frac{x}{2} \right) dx$$

Mit partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned} \int \underbrace{(x^2 + 2x)}_{u(x)} \underbrace{\operatorname{sh} \left(\frac{x}{2} \right)}_{v'(x)} dx &= u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx \text{ mit } u'(x) = 2x + 2, v(x) = 2 \operatorname{ch} \left(\frac{x}{2} \right) \\ &= 2(x^2 + 2x) \operatorname{ch} \left(\frac{x}{2} \right) - 2 \int \underbrace{(2x + 2)}_{t(x)} \underbrace{\operatorname{ch} \left(\frac{x}{2} \right)}_{s'(x)} dx \\ &= 2(x^2 + 2x) \operatorname{ch} \left(\frac{x}{2} \right) - 2 \left(s(x)t(x) - \int s(x)t'(x) dx \right) \text{ mit } t'(x) = 2, s(x) = 2 \operatorname{sh} \left(\frac{x}{2} \right) \\ &= 2(x^2 + 2x) \operatorname{ch} \left(\frac{x}{2} \right) - 2 \left(2(2x + 2) \operatorname{sh} \left(\frac{x}{2} \right) dx - \int 4 \operatorname{sh} \left(\frac{x}{2} \right) dx \right) \\ &= 2(x^2 + 2x) \operatorname{ch} \left(\frac{x}{2} \right) - 2 \left((4x + 4) \operatorname{sh} \left(\frac{x}{2} \right) dx - 8 \operatorname{ch} \left(\frac{x}{2} \right) \right) + C \\ &= 2(x^2 + 2x + 8) \operatorname{ch} \left(\frac{x}{2} \right) - 8(x + 1) \operatorname{sh} \left(\frac{x}{2} \right) + C \end{aligned}$$

(A3) Gemischte Aufgaben II

Wir benutzen für alle Aufgaben die Taylor-Entwicklung zur Bestimmung des Grenzwertes. Details zu dieser Herangehensweise finden Sie in der Musterlösung zu Serie 12. Im Folgenden werden nur die Grenzwerte gegeben.

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arctan(4x)} = \frac{1}{4}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^2)}{x^2} = 1$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4} = \frac{1}{24}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{x} = 4$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x) - x}{\sin(x) - x} = 2$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(2x) - 1}{\sin(x)} = 2$$

$$i) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos(x)}{(x - \pi)^2} = \frac{1}{2}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\exp(3x) - 1} = \frac{1}{3}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(x)}{(\sqrt{x} - 1)} = 2$$

(A4) Integration durch Substitution

Berechnen Sie das Integral $\int_{1/8}^{1/3} \sqrt{\frac{x+1}{x}} \frac{1}{x^2} dx$ durch Substitution mit der neuen Variable $u = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$.

Wir berechnen zuerst die neuen Integrationsgrenzen

$$u_1 = \sqrt{\frac{1/8 + 1}{1/8}} = \sqrt{1 + 8} = 3 \quad \text{für } x_1 = \frac{1}{8}$$

$$u_2 = \sqrt{\frac{1/3 + 1}{1/3}} = \sqrt{1 + 3} = 2 \quad \text{für } x_2 = \frac{1}{3}.$$

Wir zeigen drei verschiedene Ansätze, um das eigentliche Integral zu berechnen. Im ersten Ansatz berechnen wir dx als Funktion von du , im zweiten Ansatz berechnen wir du als Funktion von dx und im dritten Ansatz berechnen wir $\frac{1}{x^2}dx$ als Funktion von du .

1. Wir lösen die Funktion u zunächst nach x auf:

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{\frac{x+1}{x}} \\ \Leftrightarrow u^2 &= \left| \frac{x+1}{x} \right| \\ \Leftrightarrow u^2 &= \frac{x+1}{x} \quad (\text{car } x > 0) \\ \Leftrightarrow xu^2 &= x+1 \\ \Leftrightarrow x(u^2 - 1) &= 1 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{u^2 - 1}. \end{aligned}$$

Wir berechnen die Ableitung von dx nach du

$$\frac{dx}{du} = \frac{-1}{(u^2 - 1)^2} 2u \Rightarrow dx = \frac{-2u}{(u^2 - 1)^2} du.$$

Wir berechnen dann das Integral via Substitution:

$$\begin{aligned} I &= \int_{1/8}^{1/3} \sqrt{\frac{x+1}{x}} \frac{1}{x^2} dx \\ &= \int_3^2 \sqrt{\frac{\frac{1}{u^2-1} + 1}{\frac{1}{u^2-1}}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{u^2-1}\right)^2} \cdot \frac{-2u}{(u^2-1)^2} du \\ &= \int_3^2 \sqrt{\frac{1+u^2-1}{1}} \cdot (u^2-1)^2 \cdot \frac{-2u}{(u^2-1)^2} du \\ &= \int_3^2 u \cdot (-2u) du \\ &= 2 \int_2^3 u^2 du \\ &= \frac{2}{3} \left[u^3 \right]_2^3 \\ &= \frac{2}{3} (27 - 8) \\ &= \frac{2}{3} 19. \end{aligned}$$

2. Wir berechnen zunächst das neue Differential du und geben du als Funktion von dx an.

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{\frac{x+1}{x}} \\ \Rightarrow \frac{du}{dx} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{x}}} \cdot \frac{x - (x+1)}{x^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{x}}} \cdot \frac{(-1)}{x^2} \end{aligned}$$

Wir drücken du als Funktion von dx aus:

$$du = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 \sqrt{\frac{x+1}{x}}} dx.$$

Wir berechnen dann das Integral via Substitution:

$$\begin{aligned} I &= \int_{1/8}^{1/3} \sqrt{\frac{x+1}{x}} \frac{1}{x^2} dx = \int_3^2 u \cdot (-2u) du = \int_2^3 2u^2 du = \left. \frac{2}{3} u^3 \right|_2^3 \\ &= \frac{2}{3} (27 - 8) = \frac{2}{3} 19. \end{aligned}$$

3. Wir berechnen zuerst das neue Differential du und schreiben $\frac{1}{x^2} dx$ als Funktion von du .

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{\frac{x+1}{x}} \\ \Rightarrow \frac{du}{dx} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{x}}} \cdot \frac{x - (x+1)}{x^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{x}}} \cdot \frac{(-1)}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{(-1)}{x^2} \end{aligned}$$

$\frac{1}{x^2} dx$ als Funktion von du ist also:

$$\frac{1}{x^2} dx = (-2u) du.$$

Wir berechnen dann das Integral via Substitution:

$$\begin{aligned} I &= \int_{1/8}^{1/3} \sqrt{\frac{x+1}{x}} \frac{1}{x^2} dx = \int_3^2 u \cdot (-2u) du = \int_2^3 2u^2 du = \left. \frac{2}{3} u^3 \right|_2^3 \\ &= \frac{2}{3} (27 - 8) = \frac{2}{3} 19. \end{aligned}$$