Musterlösung 13 – Analyse I (Allemand)

Herbst/Winter '24
Prof. J. Krieger
T. Schmid

(A1) Multiple Choice

a) $f(x) = 2\sin(\sqrt{x}) + \sqrt{x}\cos(\sqrt{x})$. Rechnung durch Ableitung von F(x).

b) richtig. Da f stetig ist, existiert eine Stammfunktion $F'(x) = f(x)$. Mit dem Hauptsatz der Differentialrechnung können wir dann schreiben

$$\left(\int_{\xi}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = (F(x) - F(\xi))' = F'(x) = f(x).$$

c) falsch. Der Mittelwertsatz der Integralrechnung ist nur für stetige Funktionen gültig.

d) richtig. Mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung können wir schreiben:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a) = 0$$

für ein $\xi \in [a, b]$. Da $(b - a) \neq 0$, muss eine Nullstelle $f(\xi) = 0$ existieren.

e) richtig. Da F eine Stammfunktion ist, muss sie differenzierbar und damit auch stetig sein. Eine stetige injektive Funktion is streng monoton, da $F(b) > F(a)$, ist F streng monoton steigend. Somit muss für ihre Ableitung gelten $F'(x) = f(x) \geq 0$.

(A2) Kurvendiskussion

a) Bestimmen Sie das Verhalten der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = (1 + \cos(x))\sin(x)$$

an den kritischen/stationären Punkten. Berechnen Sie dann die Wendepunkte der Funktion.

Es gilt

$$f'(x) = -\underbrace{\sin^2(x)}_{=1-\cos^2(x)} + \cos^2(x) + \cos(x) = 2\cos^2(x) + \cos(x) - 1.$$

Daher ist $f'(x) = 0$ genau dann (mittels der Mitternachtsformel) wenn $\cos(x) = \frac{1}{2}$ oder $\cos(x) = -1$. Daraus folgt, dass die stationären Punkte von f gegeben sind durch

$$x_{1,k} = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad x_{2,k} = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad x_{3,k} = \pi + 2\pi k,$$

wobei $k \in \mathbb{Z}$.

Wir nutzen die zweite Ableitung um zu bestimmen, ob dies Minima oder Maxima sind. Die zweite Ableitung ist

$$f''(x) = -(1 + 4\cos(x))\sin(x).$$

Einsetzen von $x_{1,k}$ ergibt

$$f''(x_{1,k}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} < 0,$$

woraus folgt, dass f an den Stellen $x_{1,k}$ ein Maxima besitzt.

Einsetzen von $x_{2,k}$ ergibt

$$f''(x_{2,k}) = \frac{3\sqrt{3}}{2} > 0,$$

woraus folgt, dass f an den Stellen $x_{2,k}$ ein Minima besitzt.

Einsetzen von $x_{3,k}$ ergibt
$$f''(x_{3,k}) = 0.$$
Daher sind die Stellen $x_{3,k}$ möglicherweise Wendestellen. Wir prüfen dies, indem wir zeigen, dass die dritte Ableitung von f an den Stellen $x_{3,k}$ von 0 verschieden ist. Es gilt
$$f'''(x) = 4 - \cos(x) - 8\cos^2(x).$$
Einsetzen von $x_{k,3}$ ergibt
$$f'''(x_{3,k}) = -3 \neq 0.$$
Um weitere Wendepunkt zu finden, müssen wir die Nullstellen der zweiten Ableitung betrachten. Diese sind entweder gegeben durch $\sin(x) = 0$, was zu den Punkten $x_{3,k}$ führt, oder durch $1 + 4\cos(x) = 0$, was zu folgenden Punkten führt
$$x_{4,k} = \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi k$$
sowie
$$x_{5,k} = -\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi k$$
für $k \in \mathbb{Z}$. Für beide Punktmengen erhalten wir Wendepunkte, denn $f'''(x_{4,k}) \neq 0$ und $f'''(x_{5,k}) \neq 0$.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion
$$f :]-1,1[\to \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{\sqrt{\cos x}}{1-x^2}$$
ein lokales Minimum in 0 besitzt.

Wir wenden die Taylorentwicklung von $\cos(x)$ und von $\sqrt{1+y}$ an, um die Funktion f zu approximieren. Aus der Vorlesung wissen wir, dass
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)$$
und
$$(1+y)^\alpha = 1 + \alpha y + O(y^2).$$
Daraus folgt insbesondere
$$\sqrt{1+y} = (1+y)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}y + O(y^2).$$
Zusammengesetzt ergibt sich
$$\begin{aligned}\sqrt{\cos(x)} &= \sqrt{1 \underbrace{- \frac{x^2}{2} + O(x^4)}_{=:y}} = 1 + \alpha y + O(y^2) \\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + O(x^4)\right) + O(x^4) = 1 - \frac{x^2}{4} + O(x^4).\end{aligned}$$
Damit ist
$$f(x) = \frac{1 - \frac{x^2}{4} + O(x^4)}{1-x^2}.$$
Durch Polynomdivison erhalten wir (die dominanten Terme sind jene mit x^0, da wir die Entwicklung um Null betrachten. Sie stehen daher vorne)
$$(1 - \frac{x^2}{4} + O(x^4)) : (1-x^2) = 1 + \frac{3}{4}x^2 + r(x),$$
wobei $r(x) = \frac{\frac{3}{4}x^4 + O(x^4)}{1-x^2} = O(x^4)$ Also ist
$$f(x) = \frac{1 - \frac{x^2}{4} + O(x^4)}{1-x^2} = 1 + \frac{3}{4}x^2 + O(x^4)$$
Und somit lässt sich die Funktion um Null herum durch eine nach oben geöffnete Parabel approximieren und sie hat ein Minimum in $x_0 = 0$.

c) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^6 + x^5 + 2x^2 + x + 1}$$

ein lokales Maximum in 0 besitzt.

Wir führen eine Polynomdivision durch, wobei wir die Polynome von Zähler und Nenner so geordnet haben, dass die dominanten Terme vorne stehen. Dies sind die die Terme mit x^0, da wir die Entwicklung um Null betrachten

$$\begin{aligned} f(x) = \ & (2 + 2x + x^2) : (1 + x + 2x^2 + x^5 + x^6) = 2 - 3x^2 + O(x^3) \\ & \underline{-(2 + 2x + 4x^2 + 2x^5 + 2x^6)} \\ & \quad - 3x^2 - 2x^5 - 2x^6 \\ & \quad \underline{-(-3x^2 - 3x^3 - 6x^4 - 3x^7 - 3x^8)} \end{aligned}$$

Der Restterm ist $\frac{3x^3+6x^4-2x^5-2x^6+3x^7+3x^8}{1+x+2x^2+x^5+x^6} = O(x^3)$.

Dies ergibt die Taylorentwicklung von f bis zur zweiten Ordnung. Aus dieser können wir die Ableitungen an der Stelle Null ablesen. Es gilt $f'(x) = -6x$ um die Stelle Null, und somit $f'(0) = 0$. Null ist also ein kritischer Wert. Einsetzen in die zweite Ableitung um Null ergibt $f''(x) = -6$ und somit $f''(0) = -6 < 0$. Daher ist 0 ein lokales Maximum.

(A3) Integration von Potenzreihen

Polynome sind einfach zu integrieren, denn wir wissen, dass $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ eine Stammfunktion von x^n ist. Wie können wir die Stammfunktion einer komplizierten Funktion f berechnen? **Lemma 7.10** im Skript gibt uns einen Hinweis. Wir stellen f mittels Taylorentwicklung dar und integrieren dann die dabei entstehende Potenzreihe! Wir müssen dann nur noch die integrierte Potenzreihe wieder in eine „schöne Form“ bringen.

Berechnen Sie so die Stammfunktion von $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Taylorreihe von

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

ist. Somit ist die Taylorreihe von $\frac{1}{x+1} = (1+x)^{-1}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+1} &= (1+x)^{-1} = 1 + (-1)x + \frac{(-1)(-2)}{2!}x^2 + \ldots + \underbrace{\frac{(-1)(-2)\ldots(-n)}{n!}}_{=\frac{(-1)^n n!}{n!}} x^n + \ldots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \end{aligned}$$

Integrieren ergibt nach Lemma 7.10

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x &= \int \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + C \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+2} x^{k+1}}{k+1} + C = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} + C \\ &= \mathrm{Log}(x+1) + C. \end{aligned}$$

Wobei C die Integrationskonstante darstellt. Die Taylorreihe von $\log(x+1)$ ist ebenfalls aus dem Skript bekannt.

(A4) Substitutionsregel

Berechnen Sie mit Hilfe der Substitutionsregel

a) $\displaystyle\int \frac{\cos(t)}{(\sin(t)+2)^2}\,\mathrm{d}t$

Das Integral ist von der Form

$$\int \frac{\cos(t)}{(\sin(t)+2)^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{(\sin(t)+2)^2}\cos(t)\,\mathrm{d}t = \int f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t,$$

für $\phi(t) = \sin(t) + 2 \Rightarrow \phi'(t) = \cos(t)$ und $f(t) = \frac{1}{t^2}$. Wir substituieren $x = \phi(t)$ und erhalten mit der Substitutionsregel

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos(t)}{(\sin(t)+2)^2}\,\mathrm{d}t &= \int f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t = \int f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} + C = -\frac{1}{\sin(t)+2} + C\end{aligned}$$

b) $\displaystyle\int_1^e \frac{2\log(t)}{t}\,\mathrm{d}t$

Das Integral ist von der Form

$$\int_1^e \frac{2\log(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^e 2\log(t)\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^e f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t,$$

für $\phi(t) = \log(t) \Rightarrow \phi'(t) = \frac{1}{t}$ und $f(t) = 2t$. Wir substituieren $x = \phi(t)$ und erhalten mit der Substitutionsregel

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{2\log(t)}{t}\,\mathrm{d}t &= \int_1^2 f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\phi(1)}^{\phi(e)} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\log(1)}^{\log(e)} 2x\,\mathrm{d}x = 2\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = 1.\end{aligned}$$

c) $\displaystyle\int \frac{g'(t)}{g(t)}\,\mathrm{d}t \quad \text{mit } g(t) \neq 0$

Das Integral ist von der Form

$$\int \frac{g'(t)}{g(t)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{g(t)}g'(t)\,\mathrm{d}t = \int f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t,$$

für $\phi(t) = g(t) \Rightarrow \phi'(t) = f'(t)$ und $f(t) = \frac{1}{t}$. Wir substituieren $x = \phi(t)$ und erhalten mit der Substitutionsregel

$$\begin{aligned}\int \frac{g'(t)}{g(t)}\,\mathrm{d}t &= \int f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t = \int f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log|x| + C = \log|g(t)| + C.\end{aligned}$$

(A5) Partialbruchzerlegung

Berechnen Sie mit Hilfe der Partialbruchzerlegung

a) $\displaystyle\int_4^6 \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$

Die Partialbruchzerlegung berechnen wir die Stammfunktion wie folgt. Zunächst machen wir den Ansatz

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x+1)(x-1)} \stackrel{!}{=} \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}.$$

Um die Koeffizienten A und B zu ermitteln, bemerken wir, dass

$$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)}{(x+1)(x-1)} + \frac{B(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{A(x-1)+B(x+1)}{(x+1)(x-1)}.$$

Es folgt, dass

$$A(x-1)+B(x+1)=1 \Leftrightarrow (A+B)x+(B-A)=1.$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir $A+B=0$ und $B-A=1$, woraus $A=-\frac{1}{2}, B=\frac{1}{2}$ folgt. Wir berechnen damit das Integral

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{-\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\log|x-1|-\log|x+1|\right)+C = \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.\end{aligned}$$

Daher gilt

$$\begin{aligned}\int_4^6 \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\Big[\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C\Big]_4^6 = \frac{1}{2}\log\left|\frac{6-1}{6+1}\right|+C-\frac{1}{2}\log\left|\frac{4-1}{4+1}\right|-C\\ &= \frac{1}{2}\log(\frac{5}{7}\cdot\frac{5}{3}) = \log(\sqrt{\frac{25}{21}}).\end{aligned}$$

b) $\displaystyle\int \frac{x^4-x^3+x^2-x+1}{x^2-2x+1}\,\mathrm{d}x$

Polynomdivision von Zähler durch Nenner ergibt

$$\begin{array}{l}\big(\;x^4 - x^3 + x^2 - x + 1\big) \div \big(x^2-2x+1\big) = x^2+x+2+\dfrac{2x-1}{x^2-2x+1}\\ \underline{-x^4+2x^3-x^2}\\ \quad\; x^3 \qquad\quad - x\\ \quad \underline{-x^3+2x^2-x}\\ \qquad\quad 2x^2-2x+1\\ \qquad \underline{-2x^2+4x-2}\\ \qquad\qquad\quad 2x-1\end{array}$$

Wir bemerken, dass der Nenner des Restterms gleich $x^2-2x+1=(x-1)^2$ ist. Daher berechnen wir die Partialbruchzerlegung des Restterms

$$\frac{2x-1}{x^2-2x+1}=\frac{2x-1}{(x-1)^2}\overset{!}{=}\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{(x-1)}.$$

Um die Koeffizienten A und B zu ermitteln, bemerken wir, dass

$$\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{(x-1)}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B(x-1)}{(x-1)^2}.$$

Es folgt, dass

$$A+B(x-1)=2x-1 \Leftrightarrow Bx+(A-B)=2x-1.$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir $B=2$ und mit $A-B=-1$ folgt $A=1$. Wir berechnen damit das Integral

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4-x^3+x^2-x+1}{x^2-2x+1}\,\mathrm{d}x &= \int x^2+x+2+\frac{2x-1}{x^2-2x+1}\\ &= \int x^2+x+2+\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}\,\mathrm{d}x\\ &= \int x^2+x+2+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{x-1}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{x-1}+2\ln|x-1|+C\end{aligned}$$

(A6) Uneigentliche Integrale

Konvergieren die folgenden Integrale? Falls ja, geben Sie den Wert des Integrals an.

a) $\int_0^\infty te^{-t^2}\ \mathrm{d}t$

Wir bemerken, dass das Integral von der folgenden Form ist

$$\int_0^\infty te^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-t^2}2t\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t,$$

für $\phi(t) = t^2 \Rightarrow \phi'(t) = 2t$ und $f(t) = \frac{1}{2}e^{-t}$. Wir substituieren $x = \phi(t)$ und erhalten mit der Substitutionsregel

$$\begin{aligned}\int_0^\infty te^{-t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_0^\infty f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\phi(0)}^{\phi(\infty)} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{0^2}^{\infty^2} \frac{1}{2}e^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{y\to\infty}\frac{1}{2}\int_0^y e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to\infty} -\frac{1}{2}e^{-x}\bigg|_0^y \\ &= -\frac{1}{2}(0-1) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

b) $\int_e^\infty \frac{\log^2(x)}{x^{\frac{3}{2}}}\ \mathrm{d}x$

Wir berechnen das Integral mittels zweifacher partieller Integration

$$\begin{aligned}\int_e^\infty \frac{\log^2(x)}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x &= \lim_{y\to\infty}\int_e^y \frac{\log^2(x)}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{y\to\infty}\int_e^y \underbrace{\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}}_{v'(x)}\underbrace{\log^2(x)}_{u(x)}\,\mathrm{d}x \quad \text{mit } u'(x) = \frac{2}{x}\cdot\log(x), v(x) = -2\frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= \lim_{y\to\infty} u(x)v(x) - \int_e^y u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{y\to\infty} -\frac{2\log^2(x)}{\sqrt{x}}\bigg|_e^y - \int_e^y -\frac{4\log(x)}{x^{\frac{3}{2}}}\ dx \\ &= \lim_{y\to\infty} -\frac{2\log^2(x)}{\sqrt{x}}\bigg|_e^y - \lim_{y\to\infty}\frac{8\log(x)}{\sqrt{x}}\bigg|_e^y + \int_e^y \frac{8}{x^{\frac{3}{2}}}\ dx \\ &= \frac{2\log^2(e)}{\sqrt{e}} + \frac{8\log(e)}{\sqrt{e}} + \frac{16}{\sqrt{e}} = \frac{26}{\sqrt{e}}\end{aligned}$$

c) $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t$

Wir bemerken, dass das Integral von der folgenden Form ist

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t = \int_1^\infty \sqrt{1+t}^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = \int_1^\infty f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t,$$

für $\phi(t) = 1+t \Rightarrow \phi'(t) = 1$ und $f(t) = t^{-\frac{1}{2}}$. Wir substitiuieren $x = \phi(t)$ und erhalten mit der Substitutionsregel

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t &= \int_1^\infty f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t \int_{\phi(01)}^{\phi(\infty)} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{1+1}^\infty x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to\infty}\int_2^y x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{y\to\infty} 2x^{\frac{1}{2}}\bigg|_2^y = \lim_{y\to\infty} 2\sqrt{y} - 2\sqrt{2} \to \infty.\end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass das Integral divergiert.

(A7) Grenzwerte von Funktionen 2

Berechnen Sie folgende Grenzwerte.

a) $\lim_{x\to 0} \frac{1+\cos(x-\pi)}{x\sin(x)}$

Es gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\cos(x-\pi)}{x\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x\sin(x)}.$$

Wir benuten die folgenden Taylorentwicklungen

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)$$

und

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) = x + O(x^3).$$

Damit ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-(1-\frac{x^2}{2}+O(x^4))}{x(x+O(x^3))} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2}+O(x^4)}{x^2+O(x^4)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2(\frac{1}{2}+\frac{O(x^4)}{x^2})}{x^2(1+\frac{O(x^4)}{x^2})} = \frac{\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{O(x^4)}{x^2}}{1+\lim_{x\to 0}\frac{O(x^4)}{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)}{\log(\sqrt{x}+1)-\log(\sqrt{x})}$

Zunächst beobachten wir, dass

$$\log(\sqrt{x}+1)-\log(\sqrt{x}) = \log\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\right) = \log\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

Dies legt uns die Substitution $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ nahe und wir betrachten den Grenzwert um 0

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)}{\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(2y)}{\log(1+y)}.$$

Wir setzen die folgenden Taylorentwicklungen

$$\log(1+y) = y + O(y^2)$$

und

$$\sin(2y) = 2y + O(y^3)$$

ein. Es ergibt sich

$$\lim_{y\to 0} \frac{\sin(2y)}{\log(1+y)} = \lim_{y\to 0} \frac{2y+O(y^3)}{y+O(y^2)} = \lim_{y\to 0} \frac{y(2+\frac{O(y^3)}{y})}{y(1+\frac{O(y^2)}{y})}$$
$$= \frac{2+\lim_{y\to 0}\frac{O(y^3)}{y}}{1+\lim_{y\to 0}\frac{O(y^2)}{y}} = 2.$$