Herbst/Winter '24

Prof. J. Krieger

T. Schmid

(A1) Multiple Choice

a) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{\cos(x)x - \sin(x)}{x^2}$ für $x \in \mathbb{R}$ und $x \neq 0$, sowie $f(0) = 0$. Wegen $(\cos(x)x - \sin(x))' = -\sin(x)x$ sehen wir mit der Regel von L'Hospital

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)x}{2x} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0 = f(0),$$

daher ist f stetig. Ausserdem ist f in $x = 0$ differenzierbar mit $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3} = -\frac{1}{3}\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = -\frac{1}{3}$.

b) Die Aussage ist wahr. Gemäss dem Tipp betrachten wir $g(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ und $x_n = \frac{1}{n}$. Man sieht leicht, dass die Gerade die welche die Punkte $(x_n, g(x_n))$ und $(x_{n+1}, g(x_{n+1}))$ des Graphen von g verbindet gegeben ist durch den Graph der linearen Funktion

$$h_n(x) = \frac{1}{n(n+1)}((2n+1)x - 1), \quad x \in (x_{n+1}, x_n], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Man defieniere die neue Funktion $f(x) = g(x)$ falls $x \in \mathbb{R}$ und $x \leq 0$ oder $x > 1$. Andernfalls gibt es ein eindeutiges $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in (x_{n+1}, x_n]$. Daher setzen wir $f(x) = h_n(x)$ für ein solches x. Klar ist: Nach Definition ist f eine stetige Funktion in $x \neq 0$. Wir zeigen nun f ist differenzierbar im Punkt $x = 0$ (also auch stetig in $x - 0$) aber nicht differenzierbar in $x_n, n \in \mathbb{N}$.

Klar: $\lim_{x\to 0^-} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{g(x)}{x} = 2\lim_{x\to 0^-} x = 0$. Also existiert die linksseitige Ableitung und ist Null. Für die rechtsseitige Ableitung benutzen wir die $\epsilon - \delta$ Definition und zeigen, dass diese ebenfalls Null ist. Ist $0 < x < 1$, so gibt es ein eindeutiges $n \in \mathbb{N}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{n(n+1)}((2n+1)x - 1), \ \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}.$$

Ausserdem gilt dann

$$\begin{aligned} 0 < \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{n(n+1)}\frac{((2n+1)x - 1)}{x} &\leq \frac{1}{n}((2n+1)x - 1) \\ &\leq \frac{1}{n}((2n+1)\frac{1}{n} - 1) = \frac{n+1}{n^2}. \end{aligned}$$

Ist nun $\epsilon > 0$ gewählt, so so gibt es wegen $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2} = 0$, ein $N \in \mathbb{N}$ mit $0 < \frac{f(x)-f(0)}{x-0} < \epsilon$ für alle $x \in (0, 1]$ so , dass $x \in (x_n, x_{n+1}]$ für ein $n \geq N$. Für all diese x gilt dann natuerlich $x \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}$ und wir setzen $\delta := \frac{1}{2N}$.

Die Ableitung ist also $f'(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$.

Wir zeigen nun, dass die linksseitige Ableitung von f in den Punkten x_n nicht mit der rechtsseitigen übereinstimmt, genauer für $n \geq 2$

$$\begin{aligned} x \in (x_{n+1}, x_n): \quad \frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n} &= \frac{\frac{1}{n}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}((2n+1)x - 1)}{\frac{1}{n} - x} \\ &= \frac{\frac{1}{n}(\frac{2n+1}{n+1}(x - \frac{1}{n})}{\frac{1}{n} - x} \to \frac{2n+1}{n(n+1)}, \quad x \to \frac{1}{n}^-, \\ x \in (x_n, x_{n-1}): \quad \frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n} &= \frac{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n(n-1)}((2n-1)x - 1)}{\frac{1}{n} - x} \\ &= -\frac{\frac{1}{n(n-1)}(2n-1)(x - \frac{1}{n})}{\frac{1}{n} - x} \to \frac{2n-1}{n(n-1)}, \quad x \to \frac{1}{n}^+, \end{aligned}$$

Für $n = 1$ benutzen wir den linksseitigen Grenzwert und von rechts: $\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} = 2 > \frac{3}{2} = \frac{2+1}{1(1+1)}$.

(A2) Zwischenwertsatz

a) Sei $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0) = f(4)$. Zeigen Sie, dass ein $\alpha \in [0,2]$ existiert, so dass

$$f(\alpha) = f(\alpha + 2).$$

Wir betrachten die Funktion $g : [0,2] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x) = f(x+2) - f(x)$. Wir stellen fest, dass g stetig ist, weil f stetig ist. Weiter gilt

$$\begin{aligned} g(0) &= f(2) - f(0) \qquad \text{und} \\ g(2) &= f(4) - f(2) = f(0) - f(2) = -g(0). \end{aligned}$$

Aus $g(2) = -g(0)$ folgt, dass entweder g an beiden Stellen Null ist oder wir einen Vorzeichenwechsel haben. Dann muss aber an mindestens einer Stelle in $[0,2]$ die x-Achse gekreuzt werden! Der Zwischenwertsatz liefert uns nämlich ein $\alpha \in [0,2]$, so dass $g(\alpha) = 0$. Das ist gleichbedeutend mit $f(\alpha + 2) = f(\alpha)$.

b) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so dass $f(x)^2 = 1$ für alle $x \in I$. Zeigen Sie, dass entweder $f(x) = 1$ für alle $x \in I$ oder $f(x) = -1$ für alle $x \in I$.

Wir zeigen die Eigenschaft mittels Widerspruchsbeweis.
Wir nehmen an, dass $a, b \in I$ existieren, so dass $f(a) = -1$ und $f(b) = 1$. Es gilt, dass $a \neq b$. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $a < b$ gilt. Laut dem Zwischenwertsatz existiert ein $c \in [a,b]$, so dass $f(c) = 0$. Für dieses c gilt aber $f(c)^2 = 0$, was ein Widerspruch zur Annahme ist.

c) Zeigen Sie, dass die Gleichung $\frac{1}{1+x^2} = \sqrt{x}$ in den positiven reellen Zahlen $\mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Lösung hat.

Beide Funktionen, sowohl $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ als auch $g(x) = \sqrt{x}$ sind stetig auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Wir betrachten nun $h(x) = f(x) - g(x)$ und stellen fest, dass h ebenfalls stetig ist und

$$h(0) = 1 \qquad \text{und} \qquad h(1) = -\frac{1}{2}.$$

Aus dem Zwischenwertsatz folgt dann direkt die Existenz eines $c \in [0,1] \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $h(c) = 0$ und somit $f(c) = g(c)$.

(A3) Nullstellen

a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x) - e^{-x} \end{cases}$$

im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ eine Nullstelle hat.

Da die zwei Funktionen sin und exp stetig sind, ist die Funktion f ebenfalls stetig. Die Funktion f nimmt an den Stellen 0 und $\frac{\pi}{2}$ die folgenden Werte an

$$f(0) = \sin(0) - e^0 = 0 - 1 = -1 < 0$$

und

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \underbrace{e^{-\frac{\pi}{2}}}_{<1} > 1 - 1 = 0$$

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es somit ein $x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$, für welches $f(x_0) = 0$ gilt.

b) Erläutern Sie, wieso die Funktion in diesem Intervall genau eine Nullstelle hat.

Wir zeigen, dass die Funktion f streng monoton wachsend ist auf dem Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$. Daraus folgt, dass in diesem Intervall nur eine Nullstelle existiert.

Die Sinusfunktion ist in diesem Intervall streng monoton wachsend. Die Exponentialfunktion e^x is streng monoton wachsend (*), woraus folgt, dass e^{-x} streng monoton fallend ist:

$$x < y \Rightarrow -x > -y \overset{*}{\Rightarrow} e^{-x} > e^{-y}$$

Daraus wiederum folgt, dass $-e^{-x}$ streng monoton wachsend ist:

$$x < y \Rightarrow e^{-x} > e^{-y} \Rightarrow -e^{-x} < -e^{-y}.$$

Somit ist die Summe $f(x) = \sin(x) + (-e^{-x})$ auf dem gewünschten Intervall streng monoton wachsend.

(A4) Ableitungen

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden vier Funktionen, welche wir auf dem Definitionsbereich $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ betrachten. Benutzen Sie dazu die in Theorem 6.3 im Skript gegebenen Regeln.

a) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$

Umschreiben von f mittels Exponentialfunktion und Logarithmus ergibt

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}} = (e^{\log x})^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\log x}$$

Um f abzuleiten wenden wir die Kettenregel an, da wir bemerken, dass

$$f(x) = (g \circ h)(x), \quad \text{mit } h(x) = \frac{1}{x}\log x,\ g(x) = e^x.$$

Die Ableitungen von g und h sind

$$g'(x) = e^x$$

und

$$\begin{aligned} h'(x) &= (\frac{1}{x}\log x)' = \left(\frac{1}{x}\right)' \log x + \frac{1}{x}(\log x)' \\ &= -\frac{1}{x^2}\log x + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}(1 - \log x) \end{aligned}$$

wobei wir für die Ableitung von h die Produktregel verwendet haben, und die Tatsache dass $(\log x)' = \frac{1}{x}$.

Somit gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= (g \circ h)'(x) = g'(h(x))h'(x) \\ &= e^{\frac{1}{x}\log x}\frac{1}{x^2}(1 - \log x) = x^{\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}(1 - \log x) \end{aligned}$$

b) $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{2 + \sin(\log(x))}$

Anwendung der Quotientenregel ergibt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2 + \sin(\log(x)))(\cos(x))' - (2 + \sin(\log(x)))'\cos(x)}{(2 + \sin(\log(x)))^2} \\ &\overset{*}{=} \frac{-(2 + \sin(\log(x)))\sin(x) - \cos(\log(x))\frac{1}{x}\cos(x)}{(2 + \sin(\log(x)))^2} \\ &= \frac{-\sin(x)(2 + \sin(\log(x))) - \frac{1}{x}\cos(x)\cos(\log x)}{(2 + \sin(\log x))^2}. \end{aligned}$$

An der Stelle $*$ haben wir die Ableitung $(2+\sin(\log(x)))'$ mittels der Summen- und Kettenregel berechnet.

c) $f(x) = x^{\sin(x)}$

Umschreiben von f mittels Exponentialfunktion und Logarithmus ergibt

$$f(x) = x^{\sin(x)} = \left(e^{\log(x)}\right)^{\sin(x)} = e^{\sin(x)\log(x)}$$

Um f abzuleiten wenden wir die Kettenregel an, da wir bemerken, dass

$$f(x) = (g \circ h)(x), \quad \text{mit } h(x) = \sin(x)\log(x),\ g(x) = e^x.$$

Die Ableitungen von g und h sind

$$g'(x) = e^x$$

und

$$h'(x) = \cos(x)\log(x) + \frac{1}{x}\sin(x)$$

wobei wir für die Ableitung von h die Produktregel verwendet haben.

Somit gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= (g \circ h)'(x) = g'(h(x))h'(x) \\ &= e^{\sin(x)\log(x)}(\cos(x)\log(x) + \frac{1}{x}\sin(x)) \\ &= x^{\sin(x)}(\cos(x)\log(x) + \frac{1}{x}\sin(x)) \end{aligned}$$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x^{\frac{3}{5}} + \sin^3\left(\frac{1}{x}\right)}$

Um f abzuleiten wenden wir die Kettenregel an, da wir bemerken, dass

$$f(x) = (g \circ h)(x), \quad \text{mit } h(x) = x^{\frac{3}{5}} + \sin^3\left(\frac{1}{x}\right),\ g(x) = \sqrt[3]{x}.$$

Die Ableitungen von g und h sind

$$g'(x) = (\sqrt[3]{x})' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

und

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(x^{\frac{3}{5}} + \sin^3\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} + \underbrace{\left(\sin^3\left(\frac{1}{x}\right)\right)'}_{=-\frac{3}{x^2}\sin^2(\frac{1}{x})\cos(\frac{1}{x})} \\ &= \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} - \frac{3}{x^2}\sin^2(\frac{1}{x})\cos(\frac{1}{x}) \end{aligned}$$

Die Ableitung von $\sin^3\left(\frac{1}{x}\right)$ berechnen wir mittels Kettenregel wie folgt

$$\left(\sin^3\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = 3\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)\underbrace{\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)'}_{=-\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)} = -\frac{3}{x^2}\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Die Ableitung $\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)'$ ergibt sich wiederum aus der Kettenregel wie folgt

$$\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = -\cos\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= (g \circ h)'(x) = g'(h(x))h'(x) \\ &= \frac{1}{3}\left(x^{\frac{3}{5}} + \sin^3\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} - \frac{3}{x^2}\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= \left(x^{\frac{3}{5}} + \sin^3\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{5}x^{-\frac{2}{5}} - \frac{1}{x^2}\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die hundertste Ableitung von

e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 e^x$.

Leiten Sie dazu die Funktion mehrmals ab, bis ein Schema erkennbar wird. Schliessen Sie davon auf eine allgemeine Formel für die n-te Ableitung von f. Beweisen Sie diese mittels vollständiger Induktion. Setzen Sie dann $n = 100$ ein.

Mehrmaliges Ableiten von f ergibt mittels der Produktregel

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x + x^2)e^x \\ f''(x) &= (2 + 4x + x^2)e^x \\ f'''(x) &= (6 + 6x + x^2)e^x \\ f^{(4)}(x) &= (12 + 8x + x^2)e^x \end{aligned}$$

Somit liegt folgende allgemeine Formel für die n-te Ableitung, $n \geq 1$ nahe

$$f^{(n)}(x) = \left(n(n-1) + 2nx + x^2\right) e^x.$$

Diese Formel ist nun per vollständiger Induktion zu beweisen. Die Induktionsverankerung haben wir bereits für die Fälle $n = 1, 2, 3, 4$ gemacht. Fehlt noch der

Induktionsschritt, $n \to n + 1$

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}(x)\right)' = \left((n(n-1) + 2nx + x^2)e^x\right)' \\ &= (n(n-1) + 2nx + x^2)'e^x + (n(n-1) + 2nx + x^2)(e^x)' \\ &= (2n + 2x)e^x + (n(n-1) + 2nx + x^2)e^x \\ &= ((n+1)n + 2(n+1)x + x^2)e^x \end{aligned}$$

$\square$

Somit ist die Formel bewiesen.

Damit ergibt sich für die hundertste Ableitung

$$f^{(100)}(x) = (9900 + 200x + x^2)e^x.$$

(A5) Ableitungen: Differenzenquotient

Berechnen Sie für folgende Funktionen $f : E \to \mathbb{R}$ die Ableitung an der Stelle $x_0 \in A \subseteq E$. Bestimmen Sie auch den maximal möglichen Definitionsbereich A der Ableitung. Benutzen Sie direkt die Definition über den Differenzenquotienten und verwenden Sie *keine* eventuell bereits bekannten Ableitungen oder Ableitungsregeln.

a) (i) $f(x) = x\cos(x), \quad E = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)\cos(x_0+h) - x_0\cos(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \cos(x_0+h) + \lim_{h\to 0} \frac{x_0(\cos(x_0+h) - \cos(x_0))}{h} \\ &\overset{*}{=} \cos(x_0) + \lim_{h\to 0} \frac{x_0\left(-2\sin\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)\right)}{h} \qquad \text{substituiere } t := \frac{h}{2} \\ &= \cos(x_0) + \lim_{t\to 0} \frac{x_0\left(-2\sin(x_0+t)\sin(t)\right)}{2t} \\ &= \cos(x_0) - x_0 \lim_{t\to 0} \sin(x_0+t)\frac{\sin(t)}{t} \\ &= \cos(x_0) - x_0 \lim_{t\to 0} \sin(x_0+t) \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} \\ &\overset{**}{=} \cos(x_0) - x_0 \sin(x_0). \end{aligned}$$

An der Stelle $*$ verwenden wir das folgende Additionstheorem für den Cosinus

$$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\cos(x_0+h) - \cos(x_0) &= -2\sin\left(\frac{x_0+h+x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{x_0+h-x_0}{2}\right)\\ &= -2\sin\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right).\end{aligned}$$

Weiterhin haben wir an der Stelle $**$ benutzt, dass $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{t} = 1$ (Skript Beispiel 5.12).
Die Ableitung f' ist für alle $x_0 \in A = \mathbb{R}$ definiert.

(ii) $f(x) = \sqrt{x}, \quad E = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

$$\begin{aligned}f'(x_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})}{h(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{x_0+h-x_0}{h(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{x_0}}\end{aligned}$$

Im Punkt $x_0 = 0$ ist die Wurzelfunktion also nicht differenzierbar. Der Definitionsbereich A der Ableitung ist somit $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

b) Zeigen Sie nun mit Hilfe der Differenzenquotienten für die *rechts-* bzw. *linksseitige Ableitung*, Definition 6.6 im Skript, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x < 1 \\ -x(x-3) & x \geq 1 \end{cases}$$

an der Stelle $x_0 = 1$ nicht differenzierbar ist.

Auf der einen Seite gilt für die rechtsseitige Ableitung

$$f'_d(1) = \lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{-x^2+3x-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(2-x)}{x-1} = 1.$$

Andererseits gilt für die linksseitige Ableitung

$$\begin{aligned}f'_g(1) &= \lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+1-2}{x-1}\\ &= \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = 2.\end{aligned}$$

Somit ist f im Punkt 1 nicht differentierbar, da die links- und die rechtsseitige Ableitung nicht übereinstimmen.

(A6) Ableitung der Umkehrfunktion

a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 + 2x - 3$$

bijektiv ist. Berechnen Sie dann $\left(f^{-1}\right)'(0)$.

Injektiv Eine Folgerung aus Theorem 6.12 besagt, dass eine Funktion $f \in C([a,b])$, die differenzierbar ist in jedem Punkt von $]a,b[$ strikt monoton wachsend ist auf $[a,b]$, wenn $f'(x) > 0$ für alle $x \in]a,b[$.

Hier gilt $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Daher ist f strikt monoton wachsend auf $\mathbb{R}$, und somit muss f injektiv sein.

Surjektiv Die Funktion f ist surjektiv, denn sie ist stetig und es gilt

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

Die Ableitung der Umkehrfunktion an der Stelle 0 berechnen wir mittels Theorem 6.5. Dies besagt, dass wenn $f : I \to F$ eine bijektive Funktion auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ ist so dass f differenzierbar in x_0 ist mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : F \to I$ in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar und es gilt

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Wir wollen die Ableitung von f^{-1} an der Stelle $y_0 = 0$ berechnen. Es gilt $f(1) = 0 = y_0$, daher ist $x_0 = 1$. Weiter ist f differenzierbar in x_0, und $f'(x_0) = 3x_0^2 + 2 = 3 + 2 = 5 \neq 0$. Somit sind die Voraussetzungen von Theorem 6.5 erfüllt und f^{-1} ist differnzierbar in $y_0 = 0$, mit

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{5}$$

b) Berechnen Sie $\left(f^{-1}\right)'(\pi/2)$ für

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \arccos(x).$$

Es gilt

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Erneut nutzen wir Theorem 6.5. Wir suchen x_0 mit $y_0 = \pi/2 = f(x_0)$. Es gilt $\arccos(0) = \pi/2$ und $\arccos(x)$ ist in der Umgebung um die 0 differenzierbar und bijektiv. Daher kann Theorem 6.5 angewendet werden und wir erhalten

$$\left(f^{-1}\right)'(\pi/2) = \frac{1}{f'(0)} = -1.$$