

(A1) Multiple Choice

Herbst/Winter '24

Prof. J. Krieger

T. Schmid

a) falsch. Diese Aussage ist nur wahr, wenn f stetig ist.

b) falsch. Da:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 \sin(\frac{1}{h}) - 1}{h} = \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} h^2 \sin(\frac{1}{h})}_{0, \text{ via zwei Polizisten}} - \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}}_{=\infty} = -\infty$$

c) • – wahr

– falsch

– falsch

• falsch, es gilt $f(x) = O(x)$ falls $x \rightarrow 0$.

d) falsch. Gegenbeispiel $|x|$ ist stetig, aber nicht in jedem Punkt differenzierbar.

e) falsch. Gegenbeispiel: $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ 2x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$

f) wahr. Solche Funktionen gibt es, da die Stetigkeit eine echt schwächere Eigenschaft ist als die Differenzierbarkeit. Ein Beispiel ist die Weierstrass-Funktion

g) falsch. L'Hopital kann nicht angewendet werden, da zwar $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, aber $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) + \cos(x) = 1 \neq 0$.

h) falsch, da $f(1) - f(-1) = 0$ und $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{4}{3x}$.

i) • wahr.

• wahr.

• falsch.

• wahr.

• falsch. Dies ist nicht die korrekte Definition von l'Hopital, zudem muss der Grenzwert des Quotienten der Ableitungen in a existieren.

• falsch. In diesem Fall kann nur L'Hopital nicht angewendet werden, z.B. $f(x) = \sin(x) + 2x$, $g(x) = \cos(x) + 2x$.

(A2) Produktregel

a) Seien $f, g, h : E \rightarrow \mathbb{R}$ drei in $x_0 \in E$ differenzierbare Funktionen, wobei $E \subset \mathbb{R}$ eine offene Teilmenge ist. Es kann dann gezeigt werden, dass $f \cdot g \cdot h$ ebenfalls in x_0 differenzierbar ist. Finden Sie nun eine Darstellung von $(f \cdot g \cdot h)'(x_0)$ mittels $f(x_0), g(x_0), h(x_0)$ und $f'(x_0), g'(x_0), h'(x_0)$.

Wir benutzen zweimal die Produktregel

$$\begin{aligned} (f \cdot g \cdot h)'(x_0) &= ((f \cdot g) \cdot h)'(x_0) \\ &= (f \cdot g)'(x_0) \cdot h(x_0) + (f \cdot g)(x_0) \cdot h'(x_0) \\ &= (f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)) \cdot h(x_0) + f(x_0) \cdot g(x_0) \cdot h'(x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot g(x_0) \cdot h(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0) \cdot h(x_0) + f(x_0) \cdot g(x_0) \cdot h'(x_0). \end{aligned}$$

b) Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ beliebig. Betrachten Sie n Funktionen $f_k : E \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, n$, welche in $x_0 \in E$ differenzierbar sind, wobei $E \subset \mathbb{R}$ eine offene Teilmenge ist. Es kann dann gezeigt werden, dass dann $f_1 \cdot f_2 \cdots f_n$

ebenfalls differenzierbar ist in x_0 . Beweisen Sie folgende Darstellung mittels vollständiger Induktion

$$(f_1 \cdot f_2 \cdots f_n)'(x_0) = \sum_{k=1}^n f_1(x_0) \cdots f_{k-1}(x_0) \cdot f'_k(x_0) \cdot f_{k+1}(x_0) \cdots f_n(x_0).$$

Wie in Teil (a) wenden wir wiederholt die Produktregel an.

Induktionsverankerung Die Aussage stimmt für $n = 2$, denn nach der Produktregel gilt

$$(f_1 \cdot f_2)'(x_0) = f'_1(x_0)f_2(x_0) + f_1(x_0)f'_2(x_0).$$

Ausserdem haben wir in Teil (a) die Aussage für $n = 3$ bewiesen.

Induktionsschritt Wir nehmen an, dass die Aussage für alle Zahlen kleiner gleich n gilt, für ein gewisses n . Wir zeigen die Behauptung nun für $n + 1$

$$\begin{aligned} (f_1 \cdots f_n \cdot f_{n+1})'(x_0) &= ((f_1 \cdots f_n) \cdot f_{n+1})'(x_0) \\ &= (f_1 \cdots f_n)'(x_0) \cdot f_{n+1}(x_0) + (f_1 \cdots f_n)(x_0) \cdot f'_{n+1}(x_0) \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} \left(\sum_{k=1}^n f_1(x_0) \cdots f_{k-1}(x_0) f'_k(x_0) f_{k+1}(x_0) \cdots f_n(x_0) \right) \cdot f_{n+1}(x_0) \\ &\quad + (f_1 \cdots f_n)(x_0) \cdot f'_{n+1}(x_0) \\ &= \sum_{k=1}^n f_1(x_0) \cdots f_{k-1}(x_0) f'_k(x_0) f_{k+1}(x_0) \cdots f_n(x_0) \cdot f_{n+1}(x_0) \\ &\quad + f_1(x_0) \cdots f_n(x_0) \cdot f'_{n+1}(x_0) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} f_1(x_0) \cdots f_{k-1}(x_0) f'_k(x_0) f_{k+1}(x_0) \cdots f_n(x_0) f_{n+1}(x_0). \end{aligned}$$

(A3) Extremwerte

a) Bestimmen Sie die Extremstellen der Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = x^3 + 5x^2 + 3x + 6.$$

Da die Funktion f keine Stellen hat, an denen sie nicht differenzierbar ist, sind Kandidaten für Extremstellen nur die kritischen Punkte. Wir haben

$$f'(x) = 3x^2 + 10x + 3.$$

Die Nullstellen davon sind

$$x^2 + \frac{10}{3}x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = -\frac{5}{3} \pm \frac{4}{3},$$

also

$$x_1 = -3 \quad \text{sowie} \quad x_2 = -\frac{1}{3}.$$

Einsetzen in die zweite Ableitung

$$f''(x) = 6x + 10$$

ergibt

$$f''(x_1) = f''(-3) = -8 < 0, \text{ also ein lokales Maximum bei } x = -3,$$

sowie

$$f''(x_2) = f''(-\frac{1}{3}) = 8 > 0, \text{ also ein lokales Minimum bei } x = -\frac{1}{3}.$$

b) Untersuchen Sie die Funktion $f : [-5, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \sqrt{|x^2 - 2x|}$ auf: Nullstellen, Stetigkeit, Differenzierbarkeit, lokale und globale Extrema.

- **Nullstellen**

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2.$$

- **Stetigkeit** Die Funktion ist auf ganz $[-5, 5]$ stetig (als Zusammensetzung von stetigen Funktionen).

- **Differenzierbarkeit** Die Funktion ist auf $] -5, 5[\setminus \{0, 2\}$ differenzierbar. Die Nicht-Differenzierbarkeit in den Punkten 0 und 2 folgt aus der Nicht-Differenzierbarkeit von $|x|$ an der Stelle $x = 0$.

Um die Ableitung von f zu berechnen, bemerken wir, dass die Funktion $x^2 - 2x$ positive Werte annimmt für alle $x \in [-5, 5] \setminus]0, 2[$, und negative Werte für alle $x \in]0, 2[$.

Somit ist für $x \in [-5, 5] \setminus]0, 2[$

$$f'(x) = (\sqrt{|x^2 - 2x|})' = (\sqrt{x^2 - 2x})' = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$$

Für $x \in]0, 2[$ ist

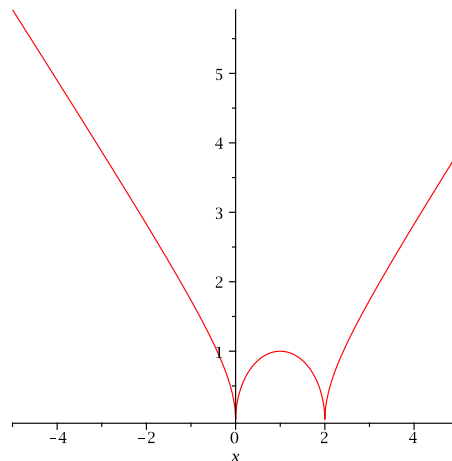
$$f'(x) = (\sqrt{|x^2 - 2x|})' = (\sqrt{-x^2 + 2x})' = \frac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}}.$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}} & x \in] -5, 5[\setminus]0, 2[\\ \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} & x \in]0, 2[\end{cases}$$

- **Extrema** Kandidaten für Extremstellen sind die folgenden Punkte.

- Randpunkte: $f(5) = \sqrt{15}$, $f(-5) = \sqrt{35}$
- Nicht-Differenzierbare Stellen: $f(0) = f(2) = 0$
- Stellen mit $f'(x) = 0$: $x = 1$ mit $f(1) = 1$.

Deshalb haben wir das globale Maximum in $x = -5$ und das globale Minimum in $x = 0$ und $x = 2$. In $x = 1$ und $x = 5$ sind zusätzlich lokale Maxima.



- c) Eine Exportfirma lässt Transportkisten herstellen mit folgenden Spezifikationen: Die Kisten sollten länger als breit sein, die Summe der Breite und der halben Länge darf nicht mehr als 8 m sein und die Höhe darf höchstens 60 cm betragen.

Wie müssen die Dimensionen (Höhe $h \geq 0$, Breite $b \geq 0$, Länge $l \geq 0$) gewählt werden, damit der Inhalt der Kiste maximal wird?

In den folgenden Berechnungen verwenden wir als Einheit Meter. Wir lassen die Einheit deshalb weg. Um den Inhalt der Kiste zu maximieren, müssen wir ihr Volumen $V = l \cdot b \cdot h$ maximieren. Die Hauptbedingung ist

$$V = l \cdot b \cdot h.$$

Die Nebenbedingungen ergeben sich aus den Spezifikationen für die Kisten

$$l \geq b \quad (1)$$

$$b + \frac{l}{2} \leq 8 \quad (2)$$

$$h \leq 0.6 \quad (3)$$

Wir sehen direkt ein, dass in der Gleichung (3) die Höhe $h = 0.6$ gewählt werden muss, da sonst für ein h existieren würde, so dass das Volumen grösser wäre. Mit dem selben Argument sehen wir in Gleichung (2), dass $b + \frac{l}{2} = 8$ gewählt werden muss. Somit sind die Nebenbedingungen

$$l \geq b \quad (4)$$

$$b + \frac{l}{2} = 8 \quad (5)$$

$$h = 0.6 \quad (6)$$

Wir stellen die Variabel l in der Nebenbedingungen (5) frei

$$l = 2(8 - b). \quad (7)$$

Damit die Nebenbedingung (4) erfüllt ist, muss

$$l = 2(8 - b) \geq b \Rightarrow b \leq \frac{16}{3}.$$

gelten. Somit haben wir

$$0 \leq b \leq \frac{16}{3},$$

und wir können die Gleichungen für l , Gleichung (7), und für h , Gleichung (6), in die Hauptbedingung einsetzen, um die Volumenfunktion in Abhängigkeit von b zu erhalten.

$$V(b) = l \cdot b \cdot h = 2(8 - b) \cdot b \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{5}(8b - b^2).$$

Um daraus die Kandidaten für ein Extremum zu erhalten, müssen wir folgende Punkte betrachten

- Randpunkte $b = 0 \Rightarrow V(b) = 0$ und $b = \frac{16}{3} \Rightarrow V(\frac{16}{3}) = \frac{256}{15} \approx 17.067$.
- Punkte, an denen $V(b)$ nicht differenzierbar ist. Es existieren keine solchen Punkte.
- Kritische Punkte, an denen die Ableitung $V'(b) = 0$ ist. Es gilt

$$V'(b) = \frac{6}{5}(8 - 2b).$$

$V'(b) = 0$ gilt für den Punkt $b = 4$, für welchen $V(4) = \frac{96}{5} = 19.2$ ist. Dies ist das gesuchte Maximum.

Daraus folgt, dass wir folgende Wahl treffen

$$h = 0.6m, \quad b = 4m, \quad l = 2(8 - b) = 8m.$$

(A4) Grenzwerte von Funktionen

Benutzen Sie die Regel von l'Hôpital, um folgende Grenzwerte zu berechnen. Denken Sie daran, stets zu überprüfen, ob die Bedingungen des Satzes erfüllt sind!

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

Es gilt, dass sowohl der Zähler wie auch der Nenner für x gegen 0 gegen 0 konvergieren,

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x - 1 = 1 - 1 = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$$

Ausserdem sind der Zähler und Nenner beide differenzierbar in $x = 0$, mit

$$(e^x - 1)' = e^x \text{ und } x' = 1.$$

Nach dem Satz von L'Hôpital gilt dann

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{1 - \cos(x)}$

Es gilt, dass sowohl der Zähler wie auch der Nenner für x gegen 0 gegen 0 konvergieren,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x - \sin(x) = 0 - 0 = 0 \text{ und } \lim_{x \rightarrow 0} 1 - \cos(x) = 1 - 1 = 0.$$

Ausserdem sind der Zähler und Nenner beide differenzierbar in $x = 0$, mit

$$(x - \sin(x))' = 1 - \cos(x) \text{ und } (1 - \cos(x))' = \sin(x).$$

Nach dem Satz von L'Hôpital gilt dann

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{1 - \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin(x))'}{(1 - \cos(x))'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)}.$$

Um den Grenzwert auf der rechten Seite zu berechnen wenden wir erneut den Satz von L'Hôpital an. Es gilt, dass sowohl der Zähler wie auch der Nenner für x gegen 0 gegen 0 konvergieren,

$$\lim_{x \rightarrow 0} 1 - \cos(x) = 1 - 1 = 0 \text{ und } \lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0.$$

Ausserdem sind der Zähler und Nenner beide differenzierbar in $x = 0$, mit

$$(1 - \cos(x))' = \sin(x) \text{ und } (\sin(x))' = \cos(x).$$

Nach dem Satz von L'Hôpital gilt dann

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{1 - \cos(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(x))'}{(\sin(x))'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{0}{1} = 0. \end{aligned}$$

c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)}{\sqrt{1-x}}$

Es gilt, dass sowohl der Zähler wie auch der Nenner für x gegen 1^- gegen 0 konvergieren,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\pi}{2} - \arcsin(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0 \text{ und } \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x} = 0.$$

Ausserdem sind der Zähler und Nenner beide differenzierbar in $x = 1$, mit

$$\begin{aligned} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)\right)' &= -(\sin^{-1}(x))' \stackrel{*}{=} -\frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} \\ &= -\frac{1}{\cos(\arcsin(x))} \stackrel{**}{=} -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

und

$$(\sqrt{1-x})' = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}}.$$

An der Stelle $*$ verwenden wir das Theorem über die Ableitung der Umkehrfunktion einer Funktion. Weiter verwenden wir an der Stelle $**$

$$\begin{aligned}
& \cos(\arcsin(x))^2 + \sin(\arcsin(x))^2 = 1 \\
& \Rightarrow \cos(\arcsin(x))^2 = 1 - \underbrace{\sin(\arcsin(x))^2}_{=x^2} \\
& \Rightarrow \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}
\end{aligned}$$

Nach dem Satz von L'Hôpital gilt dann

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)}{\sqrt{1-x}} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(\frac{\pi}{2} - \arcsin(x))'}{(\sqrt{1-x})'} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2}{\sqrt{1+x}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \exp\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\log(x+1)}\right)$

Umformen ergibt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\log(x+1)}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x+1) - x}{x \log(x+1)}.$$

Es gilt, dass sowohl der Zähler wie auch der Nenner für x gegen 0 gegen 0 konvergieren,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log(x+1) - x = 0 - 0 = 0 \text{ und } \lim_{x \rightarrow 0} x \log(x+1) = 0.$$

Ausserdem sind der Zähler und Nenner beide differenzierbar in $x = 0$, mit

$$(\log(x+1) - x)' = \frac{1}{x+1} - 1 \text{ und } (x \log(x+1))' = \log(x+1) + \frac{x}{x+1}.$$

Nach dem Satz von L'Hôpital gilt dann

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x+1) - x}{x \log(x+1)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\log(x+1) - x)'}{(x \log(x+1))'} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+1} - 1}{\log(x+1) + \frac{x}{x+1}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x + (x+1) \log(x+1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x + x \log(x+1) + \log(x+1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x(1 + \log(x+1) + \frac{\log(x+1)}{x})} \\
&= - \frac{1}{1 + \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \log(x+1)}_{=0} + \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x+1)}{x}}_{=1}} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

An der Stelle * verwenden wir erneut den Satz von L'Hôpital.

Damit gilt, dass

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\log(x+1)}\right) = -\frac{1}{2}$$

und mit dem Hinweis erhalten wir, dass

$$\lim_{x \rightarrow 0} \exp\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\log(x+1)}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\right) = e^{-(1/2)}.$$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \arctan(x))^{\frac{1}{x}}$

Es gilt

$$(1 + \arctan(x))^{\frac{1}{x}} = (e^{\log(1 + \arctan(x))})^{\frac{1}{x}} = e^{\left(\frac{1}{x} \log(1 + \arctan(x))\right)}$$

Mit der Stetigkeit der Exponentialfunktion gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\left(\frac{1}{x} \log(1 + \arctan(x))\right)} = e^{\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log(1 + \arctan(x))\right)}.$$

Der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \arctan(x))}{x}$ berechnen wir mit dem Satz von L'Hôpital, wobei wir bemerken dass sowohl der Zähler, wie auch der Nenner gegen 0 konvergieren für x gegen 0. Ausserdem sind der Zähler und Nenner beide differenzierbar in $x = 0$, mit

$$\begin{aligned} (\log(1 + \arctan(x)))' &= \log'(1 + \arctan(x))(1 + \arctan(x))' \\ &= \frac{1}{1 + \arctan(x)} \frac{1}{1 + x^2} \end{aligned}$$

und

$$(x)' = 1.$$

Nach dem Satz von L'Hôpital gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \arctan(x))}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\log(1 + \arctan(x)))'}{(x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1 + \arctan(x)} \frac{1}{1 + x^2}}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \arctan(x)} \frac{1}{1 + x^2} = 1. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \arctan(x))^{\frac{1}{x}} &= e^{\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log(1 + \arctan(x))\right)} \\ &= e^1 = e. \end{aligned}$$

(A5) Grenzwerte von Funktionen, für die die Regel von L'Hôpital nicht anwendbar ist

In den folgenden zwei Fällen lässt sich der Grenzwert nicht mit Hilfe der Regel von L'Hôpital berechnen. Begründen Sie, wieso die Regel von L'Hôpital nicht zur Berechnung des Grenzwertes dient, und berechnen Sie die Grenzwerte.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

Die Bedingungen für die Regel von L'Hôpital sind erfüllt, sowohl Zähler wie auch Nenner gehen gegen ∞ für x gegen ∞ . Weiter sind Zähler und Nenner differenzierbar. Somit lässt sich die Regel von L'Hôpital anwenden, und wir erhalten

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x)'}{(\sqrt{x^2 + 1})'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}.$$

Nochmaliges Anwenden der Regel von L'Hôpital ergibt (die Voraussetzungen sind erfüllt!)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1})'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Somit sind wir wieder bei dem Ursprünglichen Problem angelangt. Die Regel von L'Hôpital hilft also offensichtlich nicht weiter.

Der Grenzwert lässt sich wie folgt berechnen

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2(1 + \frac{1}{x^2})}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2} \sqrt{(1 + \frac{1}{x^2})}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{(1 + \frac{1}{x^2})}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1.\end{aligned}$$

b) Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(\frac{1}{x})}{x + \sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(\frac{1}{x})}{1 + \sin(x)/x}.$$

In dieser Form sehen wir dass $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(\frac{1}{x}) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. Somit gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(\frac{1}{x})}{1 + \sin(x)/x} = \frac{0}{1 + 1} = 0.$$

Dies ist der korrekte Grenzwert. Die Regel von L'Hôpital führt hingegen zu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(\frac{1}{x})}{x + \sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})}{1 + \cos(x)}$$

In dieser Form existiert der Grenzwert nicht, da $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} 2x \sin(\frac{1}{x}) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(\frac{1}{x})$ divergiert. Die Regel von L'Hôpital ist also nutzlos, da der Grenzwert der Ableitungen divergiert und demnach keine Aussage bezüglich der Konvergenz möglich ist.

(A6) Taylorpolynome

Gegeben sei die Funktion $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert als $f(x) = \sin(2\pi x) + x$. Seien $p_1(x_i, x)$, $i = 0, \dots, 3$ die Taylorpolynome erster Ordnung (ersten Grades) von f in den jeweiligen Punkten $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$ et $x_3 = \frac{3}{2}$. Sei $P(x)$ eine abschnittsweise definierte Funktion:

$$P(x) = \begin{cases} p_1(x_0, x) & x \in [0, \frac{1}{2}[\\ p_1(x_1, x) & x \in [\frac{1}{2}, 1[\\ p_1(x_2, x) & x \in [1, \frac{3}{2}[\\ p_1(x_3, x) & x \in [\frac{3}{2}, 2] \end{cases}$$

Zur Erinnerung: Die Taylor-Entwicklung n ten Grades einer Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, welche für $x_i \in D$ stetig ist, ist definiert als

$$f_n(x) = \sum_{n=0}^n \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!} (x - x_i)^n.$$

- Wir geben die Polynome $p_1(x_i, x)$, $i = 0, \dots, 3$ explizit an. Das Taylorpolynom $p_1(x_i, x)$ von erster Ordnung für $f(x) = \sin(2\pi x) + x$ im Punkt x_i ist

$$\begin{aligned}p_1(x_i, x) &= \sum_{n=0}^1 f^{(n)}(x_i) (x - x_i)^n \\ &= f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) \\ &= \sin(2\pi x_i) + x_i + (2\pi \cos(2\pi x_i) + 1)(x - x_i).\end{aligned}$$

(a) Für $x_0 = 0$:

$$p_1(x_0, x) = \sin(0) + 0 + (2\pi \cos(0) + 1)(x - 0) = (2\pi + 1)x$$

(b) Für $x_1 = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}p_1(x_1, x) &= \sin(\pi) + \frac{1}{2} + (2\pi \cos(\pi) + 1)(x - \frac{1}{2}) \\ &= \frac{1}{2} + (1 - 2\pi)(x - \frac{1}{2})\end{aligned}$$

(c) Für $x_2 = 1$:

$$\begin{aligned} p_1(x_2, x) &= \sin(2\pi) + 1 + (2\pi \cos(2\pi) + 1)(x - 1) \\ &= 1 + (1 + 2\pi)(x - 1) \end{aligned}$$

(d) Für $x_3 = \frac{3}{2}$:

$$\begin{aligned} p_1(x_3, x) &= \sin(3\pi) + \frac{3}{2} + (2\pi \cos(3\pi) + 1)(x - \frac{3}{2}) \\ &= \frac{3}{2} + (1 - 2\pi)(x - \frac{3}{2}) \end{aligned}$$

2. Wir setzen die Polynome von Aufgabe a) in die Definition von P ein:

$$P(x) = \begin{cases} (2\pi + 1)x & \text{falls } x \in [0, \frac{1}{2}[\\ \frac{1}{2} + (1 - 2\pi)(x - \frac{1}{2}) & \text{falls } x \in [\frac{1}{2}, 1[\\ 1 + (1 + 2\pi)(x - 1) & \text{falls } x \in [1, \frac{3}{2}[\\ \frac{3}{2} + (1 - 2\pi)(x - \frac{3}{2}) & \text{falls } x \in [\frac{3}{2}, 2] \end{cases}$$

Die Funktion P ist abschnittsweise stetig (da jeder Abschnitt als Polynom definiert ist). Wir müssen also die Stetigkeit in den Punkten x_i mit $i = 1, 2, 3$ untersuchen.

(a) Für $x_1 = \frac{1}{2}$:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} P(x) = \frac{2\pi + 1}{2} \neq \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} P(x)$$

Also ist P im Punkt $x_1 = \frac{1}{2}$ nicht stetig.

(b) Für $x_2 = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} P(x) = \frac{1}{2} + \frac{1 - 2\pi}{2} \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} P(x)$$

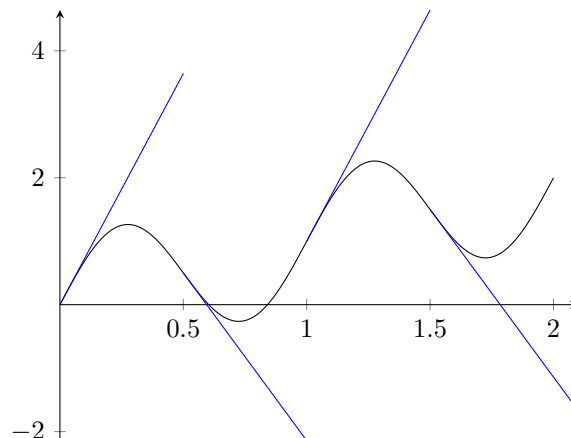
Also ist P im Punkt $x_2 = 1$ nicht stetig.

(c) En $x_3 = \frac{3}{2}$:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} P(x) = 1 + \frac{2\pi + 1}{2} \neq \frac{3}{2} = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} P(x)$$

Also ist P im Punkt $x_3 = \frac{3}{2}$ nicht stetig.

Die folgende Graphik zeigt P in blau und f in schwarz. Wir können die drei Sprungstellen in x_1, x_2, x_3 erkennen.



3. Wir zeigen nun, dass $|f(x) - P(x)| \leq \frac{\pi^2}{2}$ für alle $x \in [0, 2]$ gilt. Aus der Vorlesung wissen wir, dass

$$\begin{aligned} |f(x) - p_i(x)| &\leq \max_{y \in [x_i, x]} \left| \frac{f''(y)}{2} (x - x_i)^2 \right| \\ &= \max_{y \in [x_i, x]} | -2\pi^2 \sin(2\pi y) (x - x_i)^2 | \\ &\leq 2\pi^2 (x - x_i)^2 \end{aligned}$$

da $| -2\pi^2 \sin(2\pi y) |$ durch $2\pi^2$ beschränkt ist.

Zudem gilt $|x - x_i| \leq \frac{1}{2}$ für jeden Abschnitt von P . Wir erhalten also das gewünschte Ergebnis

$$|f(x) - P(x)| \leq 2\pi^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{2}.$$