

EIN KOMPLIZIERTERES BEISPIEL FÜR KONVERGENZ EINER ZAHLENFOLGE

Setzen wir

$$a_0 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(a_n + \frac{2}{a_n}\right), n \geq 0.$$

Dies ist eine Folge positiver Zahlen. Wir behaupten

Satz: Die Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert gegen $\sqrt{2}$.

Um dies zu zeigen, müssen wir belegen, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt derart dass

$$|a_n - \sqrt{2}| < \varepsilon$$

für jedes $n \geq N_\varepsilon$. Wir zeigen tatsächlich zunächst dass

$$a_n^2 - 2$$

nach 0 konvergiert, dann folgt auch die Konvergenz von a_n leicht. Hierfür betrachten wir

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 - 2 &= \left[\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)\right]^2 - 2 \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left(a_n^2 + 4 + \frac{4}{a_n^2}\right) - 2 \\ &= \frac{a_n^2}{4} + 1 + \frac{1}{a_n^2} - 2 \\ &= \frac{a_n^2}{4} - 1 + \frac{1}{a_n^2} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left(a_n - \frac{2}{a_n}\right)^2, \end{aligned}$$

wo wir zwei Mal die binomische Formel für $(a+b)^2$ verwendet haben. Das Vorige kann man auch als

$$(0.1) \quad a_{n+1}^2 - 2 = \frac{1}{4a_n^2} \cdot (a_n^2 - 2)^2$$

ausdrücken. Nun ist $a_0^2 - 2 = 2$, und wir behaupten, dass immer $0 < a_n^2 - 2 \leq 2$ gilt. Wenn dies für ein $n \geq 0$ gilt, dann auch für $n+1$, da dann

$$0 < \frac{1}{4a_n^2} \cdot (a_n^2 - 2)^2 \leq \frac{1}{4a_n^2} \cdot 4 \leq \frac{1}{2}$$

folgt, und somit

$$0 < a_{n+1}^2 - 2 \leq \frac{1}{2} < 2$$

folgt. Damit folgt aus $0 < a_n^2 - 2 \leq 2$ ebenso $0 < a_{n+1}^2 - 2 \leq 2$, und weil die Ungleichungen für $n=0$ gelten, so sind sie für jedes $n \geq 0$ wahr.

Aus (0.1) folgt dann

$$a_{n+1}^2 - 2 = (a_n^2 - 2) \cdot \frac{a_n^2 - 2}{4a_n^2} \leq \frac{a_n^2 - 2}{4}, n \geq 0.$$

da $\frac{a_n^2 - 2}{a_n^2} \leq \frac{2}{2} \leq 1$ gilt nach dem eben bewiesenen. Für $n \geq 1$ haben wir dann durch repetierte Anwendung dieser Ungleichung(mit $n+1$ ersetzt durch n)

$$0 < a_n^2 - 2 \leq \frac{1}{4}(a_{n-1}^2 - 2) \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}(a_{n-2}^2 - 2) \leq \dots \leq \frac{1}{4^n} \cdot (a_0^2 - 2) = \frac{2}{4^n}.$$

Nach dem Beispiel der Folge $(q^n)_{n=0}^\infty$ mit $q = \frac{1}{4}$ wissen wir dass $\frac{2}{4^n}$ nach 0 konvergiert wenn $n \rightarrow \infty$. Damit folgt dass

$$a_n^2 - 2 \rightarrow 0$$

wenn $n \rightarrow \infty$. Schliesslich kommen wir zur Konvergenz von a_n nach $\sqrt{2}$. Hier haben wir¹

$$|a_n - \sqrt{2}| = \frac{|a_n^2 - 2|}{|a_n + \sqrt{2}|} \leq \frac{a_n^2 - 2}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 4^n}.$$

Wenn $\varepsilon > 0$ gegeben ist, so wahlen wir $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gross genug, sodass

$$\frac{1}{\sqrt{2} \cdot 4^{N_\varepsilon}} < \varepsilon.$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$\sqrt{2} \cdot 4^{N_\varepsilon} > \varepsilon^{-1},$$

oder, wenn wir mit Logarithmen bezueglich der Basis 4 rechnen, mit

$$N_\varepsilon > \log_4 \left(\frac{1}{\sqrt{2}\varepsilon} \right)$$

Weil N_ε eine ganze Zahl sein soll, koennen wir

$$N_\varepsilon = \lfloor \log_4 \left(\frac{1}{\sqrt{2}\varepsilon} \right) \rfloor + 1$$

setzen.

Dann ist

$$\frac{1}{\sqrt{2} \cdot 4^n} < \varepsilon$$

fuer $n \geq N_\varepsilon$ weil die Folge $\frac{1}{\sqrt{2} \cdot 4^n}$ monoton abnimmt. Also gilt

$$|a_n - \sqrt{2}| < \varepsilon$$

fuer $n \geq N_\varepsilon$. Weil $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Konvergenz von $(a_n)_{n=0}^\infty$ nach $\sqrt{2}$.

¹Weil $0 < a_n^2 - 2$ und $0 < a_n$ haben wir $a_n > \sqrt{2}$.