

Remarque

Certains exercices consistent en des questions de type Vrai ou Faux (V/F). Pour chaque question, répondre VRAI si l'affirmation est toujours vraie ou par FAUX si elle n'est pas toujours vraie.

Exercice 1.

Est-ce que la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{x - 1}, & x > 1 \\ 3, & x \leq 1 \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2.

Calculer les limites ci-dessous.

(i) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, où $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4x + 4}$.

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

(iii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{2x}}{\sqrt{1+2x} - \sqrt{3}}$.

(iv) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$.

(v) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan(\sqrt{x} - 1)}{x - 1}$.

(vi) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + \alpha)^n - \alpha^n}{x}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.

Calculer les limites suivantes.

(i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{2x + 1}$.

(ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} + x)$.

(iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 4}{\sqrt{x^2 + 7x}} \arctan x$.

(iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}}$.

Exercice 4.

Vrai ou faux ?

Q1 : Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ (avec $x_0 \in \mathbb{R}$) et si $f(x) \geq 0$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{f(x)} = +\infty$.

Q2 : Si f est impaire et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -l$.

Q3 : Si f est paire et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Q4 : Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que f est croissante sur $[\alpha, +\infty[$.

Q5 : Si $|f|$ est continue en tout point, alors f aussi est continue en tout point.

Q6 : Si f n'est continue en aucun point, alors f^2 a la même propriété.

Exercice 5.

Étudier la continuité des fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ci-dessous en $x = 0$.

$$(i) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + 2^{1/x}}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

$$(ii) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

$$(iii) \quad f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$(iv) \quad f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Exercice 6.

Trouver, s'il existe, le prolongement par continuité des fonctions f suivantes au point x_0 , ou alors montrer que f ne peut pas être prolongée par continuité en x_0 .

$$(i) \quad f: [0, 1[\cup]1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x}}{\sqrt{1+2x} - \sqrt{3}} \quad \text{en } x_0 = 1.$$

$$(ii) \quad \text{Soit } A = \left\{ \left(\frac{\pi}{2} + n\pi \right)^{-1} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

$$f:]0, 1] \setminus A \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \tan\left(\frac{1}{x}\right) \left(1 - \sin\left(\frac{1}{x}\right)^2 \right) \quad \text{pour } x_0 \in A \cup \{0\}.$$

$$(iii) \quad f:]1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x(x-1)\tan(x-1)}{x^3 - 3x + 2} \quad \text{en } x_0 = 1.$$

Donc le prolongement par continuité de f est

$$\hat{f}_1: [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad \hat{f}_1(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x}}{\sqrt{1+2x} - \sqrt{3}}, & x \neq 1 \\ -\frac{\sqrt{6}}{4}, & x = 1 \end{cases}$$

Remarque : on peut aussi écrire le prolongement par continuité sans distinction de cas :

$$\hat{f}_1: [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad \hat{f}_1(x) = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{1+2x} + \sqrt{3}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2x}}.$$

Comme l'expression de f n'est pas définie pour $x \in A \cup \{0\}$, il faut passer aux limites. Pour ceci, remarquons que, pour $x \notin A \cup \{0\}$, avec un peu de trigonométrie on obtient

$$\tan\left(\frac{1}{x}\right) \left(1 - \sin\left(\frac{1}{x}\right)^2 \right) = \tan\left(\frac{1}{x}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right)^2 = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2}{x}\right).$$

Soit $a_n = \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)^{-1} \in A$. Alors on a

$$\lim_{x \rightarrow a_n} f(x) = \lim_{x \rightarrow a_n} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = (-1)^n \cdot 0 = 0,$$

c'est-à-dire f peut être prolongée par continuité pour tout $a \in A$. Pour $x = 0$, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2}{x}\right) \quad \text{qui n'existe pas.}$$

Comme la limite $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ n'existe pas, f ne peut être prolongé par continuité en $x = 0$. Le prolongement par continuité de f est donc possible seulement dans $]0, 1]$ et il s'écrit

$$\hat{f}_A:]0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \hat{f}_A(x) = \begin{cases} \tan\left(\frac{1}{x}\right) \left(1 - \sin\left(\frac{1}{x}\right)^2\right), & x \notin A \\ 0, & x \in A \end{cases}$$

ou, sans séparation des cas, $\hat{f}_A:]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $\hat{f}_A(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

L'expression de f n'étant pas définie pour $x = 1$, on veut calculer sa limite à droite en ce point. Comme le dénominateur de f s'écrit $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$ on a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x - 1) \tan(x - 1)}{x^3 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x - 1) \tan(x - 1)}{(x - 1)^2(x + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\left(\frac{x}{x + 2} \right) \left(\frac{\tan(x - 1)}{x - 1} \right) \right) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x + 2} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\tan(x - 1)}{x - 1} \right) \\ &= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\sin(x - 1)}{(x - 1)} \frac{1}{\cos(x - 1)} \right) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Ainsi le prolongement par continuité de f est

$$\hat{f}_1: [1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \hat{f}_1(x) = \begin{cases} \frac{x(x - 1) \tan(x - 1)}{x^3 - 3x + 2}, & x > 1 \\ \frac{1}{3}, & x = 1 \end{cases}$$

Notez que ce prolongement par continuité ne s'écrit pas sans séparation des cas.

Exercice 7.

Étudier la continuité des fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ci-dessous.

$$(i) \quad f(x) = \arcsin\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(x)^{2n}}{1 + \sin(x)^{2n}}\right) \qquad (ii) \quad f(x) = x^4 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - 1}{x^{2n} + 1}\right)$$

Exercice 8.

Soient I un intervalle, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $f(I)$ l'image de I par f .

Vrai ou faux ?

Q1 : $f(I)$ est un intervalle.

Q2 : Si I est borné et fermé, alors $f(I)$ est borné et fermé.

Q3 : Si I est borné, alors $f(I)$ est borné.

Q4 : Si I est ouvert, alors $f(I)$ est ouvert.

Q5 : Si $I = [a, b[$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, alors f atteint soit son minimum soit son maximum sur I .

Q6 : Si $I = [a, \infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$, alors f atteint soit son minimum soit son maximum sur I .

Q7 : Si f est strictement croissante et I est ouvert, alors $f(I)$ est ouvert.

Exercice 9.

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et soit la fonction $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - 2x - 3}, & x > 3 \\ \alpha, & x = 3 \\ \beta x - 4, & x < 3 \end{cases}$$

Étudier la continuité de f en $x_0 = 3$ pour les paires de paramètres (α, β) données ci-dessous.

- (i) $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ (ii) $\left(1, \frac{5}{3}\right)$ (iii) $\left(2, \frac{5}{3}\right)$ (iv) $(1, 2)$ (v) $(2, 2)$

Exercice 10.

Montrer que les équations suivantes admettent des solutions :

- (i) $e^{x-1} = x + 1$ (ii) $x^2 - \frac{1}{x} = 1$

Solution des exercices calculatoires

Exercice 2 (i) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$

(ii) 0

(iii) $-\frac{\sqrt{6}}{4}$

(iv) 0

(v) $\frac{1}{2}$

(vi) $n\alpha^{n-1}$

Exercice 3 (i) $-\frac{1}{2}$

(ii) $-\frac{1}{2}$

(iii) π

(iv) $\sqrt{2}$