

Remarque

Certains exercices consistent en des questions de type Vrai ou Faux (V/F). Pour chaque question, répondre VRAI si l'affirmation est toujours vraie ou par FAUX si elle n'est pas toujours vraie.

Exercice 1.

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{3x}{2} + \frac{\pi}{2} \cos(x) - \frac{3\pi}{4} \sin(x).$$

(i) Soit $(x_n)_{n \geq 0}$, la suite définie par récurrence par

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = f(x_n) \quad n \geq 0. \end{cases}$$

Alors,

- ☐ (x_n) converge et $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\pi}{2}$.
- ☐ (x_n) converge et $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \pi$.
- ☐ (x_n) diverge, $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \pi$.
- ☐ (x_n) diverge, $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\pi}{2}$.

(ii) Soit $(x_n)_{n \geq 0}$, la suite définie par récurrence par

$$\begin{cases} x_0 = \pi \\ x_{n+1} = f(x_n) \quad n \geq 0. \end{cases}$$

Alors,

- ☐ (x_n) converge et $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\pi}{2}$.
- ☐ (x_n) converge et $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \pi$.
- ☐ (x_n) diverge, $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \pi$.
- ☐ (x_n) diverge, $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 2.

Rappel : f est croissante si $x \leq y$ implique $f(x) \leq f(y)$ et décroissante si $x \leq y$ implique $f(x) \geq f(y)$. Soient les fonctions $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Déterminer la monotonie de leur composée $g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si

- (i) f et g sont croissantes,
- (ii) f et g sont décroissantes,
- (iii) f est croissante et g est décroissante.

Qu'en est-il de la monotonie de $f \circ g$ dans le cas (iii) ?

Exercice 3. (i) Si $f: X \rightarrow Y$ est croissante et bijective, alors $f^{-1}: Y \rightarrow X$ est

- ☐ décroissante
- ☐ croissante
- ☐ ni croissante ni décroissante
- ☐ bornée

(ii) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction impaire et bijective, alors f^{-1} est

- ☐ impaire

- ☐ paire
- ☐ ni paire ni impaire
- ☐ périodique

Exercice 4. (i) Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^n \log \left(\frac{(k+1)^2}{k(k+2)} \right) = \log \left(\frac{n+1}{n+2} \right) + \log(2).$$

(ii) En déduire la valeur de la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log \left(\frac{(k+1)^2}{k(k+2)} \right).$$

Indication : on pourra utiliser sans démonstration que si (x_n) est une suite telle que pour tout n , $x_n > 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l > 0$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \log(x_n) = \log(l)$ (car $\log : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue).

Exercice 5. (i) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ et $x, y \in \mathbb{R}$,

$$x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} y^k x^{n-k-1}$$

(ii) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^n$.

Montrer que f est croissante.

(iii) Soit $n \in \mathbb{N}$ impair et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^n$.

Montrer que f est croissante.

Suggestion : En choisissant $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq y$ afin de montrer la croissance de f , distinguer les cas $0 \leq x \leq y$, $x \leq 0 \leq y$ et $x \leq y \leq 0$. Pour le dernier cas, utiliser que f est impaire et le résultat du point (ii).

(iv) Soit $n \in \mathbb{N}$ pair et $f : \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^n$.

Montrer que f est décroissante.

Suggestion : utilisez le fait que x^n est paire.

Exercice 6.

Vrai ou faux ?

Q1 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique. La plus petite période de f est toujours définie, c'est-à-dire qu'il existe un plus petit $T > 0$ tel que $f(x+T) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$.

Q2 : Si f est périodique, alors $|f|$ est aussi périodique.

Q3 : Si $|f|$ est périodique, alors f est aussi périodique.

Q4 : Si f et $|f|$ ont une plus petite période, celles-ci sont égales.

Exercice 7.

Donner le domaine de définition et étudier la parité et la périodicité des fonctions f suivantes, en donnant la plus petite période le cas échéant :

(i) $f(x) = \frac{x^4 \cos(3x)}{1 + \sin^2(x)}$

(ii) $f(x) = 2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \cos\left(\frac{1}{3}x\right)$

(iii) $f(x) = \tan(3x) + \cos(\pi x)$

(iv) $f(x) = (x - [x])^2$, où $[x]$ est la partie entière inférieure de $x \in \mathbb{R}$. Par exemple $[\pi] = 3$, $[2.9] = 2$, $[-1.5] = -2$.

Exercice 8.

Montrer les propriétés suivantes des fonctions paires et impaires.

Théorème

Soient $p_1, p_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions paires, $q_1, q_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions impaires et $f: p_1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Alors,

- (i) $p_1 + p_2$ est paire.
- (ii) $p_1 p_2$ est paire.
- (iii) $q_1 + q_2$ est impaire.
- (iv) $q_1 q_2$ est paire.
- (v) $p_1 q_1$ est impaire.
- (vi) $q_1 \circ q_2$ est impaire.
- (vii) $p_1 \circ q_1$ est paire.
- (viii) $f \circ p_1$ est paire.

Exercice 9.

Soient $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.

Vrai ou faux ?

- Q1 : Si f est strictement monotone, alors f est injective.
- Q2 : Si f est injective, alors f est monotone.
- Q3 : Si f est bijective et croissante, alors sa fonction réciproque f^{-1} est décroissante.
- Q4 : Si $f \circ g$ est décroissante, alors f et g sont décroissantes.

Exercice 10.

Trouver les valeurs de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ pour lesquelles les limites suivantes existent dans $\mathbb{R}$:

$$(i) \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\tan(x - \alpha)^2}{(x - \alpha)^2}; \quad (ii) \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{x^4 - 2\alpha x^3 + 4x^2}{(x - \alpha)^2}; \quad (iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \alpha|x|}{\sqrt{x^2 + \beta} \left| \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right|}.$$

Indication : pour le (iii), étudier séparément les cas $\beta = 0$, $\beta < 0$, $\beta > 0$.

Exercice 11.

Montrer à l'aide de la définition de la limite que

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 8) = 10.$$

Exercice 12 (Grammaire mathématique, fonctions).

Vrai ou faux ?

- Q1 : $\forall f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \exists r \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x_0) = r.$$

- Q2 : $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \exists r \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x_0) = r.$$

- Q3 : $\exists r \in \mathbb{R}$ tel que $\forall f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x_0) = r.$$

- Q4 : $\exists x_0 \in \mathbb{R}, \exists r \in \mathbb{R}$ tels que $\forall f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$

$$f(x_0) = r.$$

Solution des exercices calculatoires

Exercice 4 (ii) $\log(2)$