

Remarque

Certains exercices consistent en des questions de type Vrai ou Faux (V/F). Pour chaque question, répondre VRAI si l'affirmation est toujours vraie ou par FAUX si elle n'est pas toujours vraie.

Exercice 1.

Calculer les intégrales définies suivantes :

$$(i) \int_0^{\pi/2} \sin(x)^5 dx$$

$$(ii) \int_2^3 \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx$$

$$(iii) \int_{\pi^2/16}^{\pi^2/9} \cos(\sqrt{x}) dx$$

Exercice 2.

Calculer les primitives suivantes :

$$(i) \int x^2 \cos(x) dx$$

$$(ii) \int e^{ax} \cos(bx) dx \quad (a \neq 0)$$

Exercice 3.

Calculer l'intégrale

$$\int_0^{\pi^{1/33}} \sin(\sin(x^{33})) \cos(x^{33}) x^{32} dx.$$

Exercice 4.

Déterminer le type des intégrales généralisées I suivantes et les calculer :

$$(i) I = \int_1^\infty \frac{\log(x)}{x^2} dx$$

$$(iii) I = \int_0^\infty \sin(x) e^{-x} dx$$

$$(ii) I = \int_{1+}^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$$

$$(iv) I = \int_{0+}^\infty e^{-x} (1-x) \log(x) dx$$

Exercice 5.

Calculer les primitives suivantes :

$$(i) \int \frac{x-2}{x(x+1)^2} dx$$

$$(ii) \int \frac{x^3}{(1+x^2)^2} dx$$

$$(iii) \int \frac{x^2-2}{x^3-x^2} dx$$

$$(iv) \int \frac{4x}{x^4-1} dx$$

Exercice 6.

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle ouvert $]a, b[\subset D$ (avec $a < b$).

Q1 : L'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ existe, c'est-à-dire qu'il existe $S \in \mathbb{R}$ tel que

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

Q2 : Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $a < \alpha < \beta < b$, l'intégrale $\int_\alpha^\beta f(x) dx$ existe, c'est-à-dire qu'il existe $S \in \mathbb{R}$ tel que

$$S = \int_\alpha^\beta f(x) dx.$$

Q3 : Il existe $F :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in]a, b[$.

Exercice 7.

Soit $a > 0$ et $f: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. À l'aide d'un changement de variables adéquat montrer que

(i) si f est paire, alors

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx.$$

(ii) si f est impaire, alors

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

Exercice 8.

Calculer le développement limité d'ordre 7 autour de 0 des fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$(i) \quad f(x) = \int_0^x \log(1+t^2) dt$$

$$(ii) \quad f(x) = \int_0^{x^2} e^{\sin(t)} dt$$

Exercice 9 (Décomposition en éléments simples : boss final).

Calculer

$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{2x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 4x + 3}{x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1} dx.$$

Indication : pour vous permettre de plus facilement trouver vos erreurs de calcul (si il y en a) voici quelques étapes intermédiaires :

$$\frac{3x^3 - 5x^2 + 3x}{x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2x}{x^2 - x + 1}$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x-1} dx = -\log(3)$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(x-1)^2} dx = \frac{4}{3}$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{2x}{x^2 - x + 1} dx = \log\left(\frac{3}{7}\right) + \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 2x + 3 dx = 3$$

Solution des exercices calculatoires

Exercice 1 (i) $\frac{8}{15}$

(ii) $4 - 2\sqrt{3} + \log\left(\frac{\sqrt{3} + 1}{3(\sqrt{3} - 1)}\right)$

(iii) $1 - \sqrt{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{4} + \frac{\pi\sqrt{3}}{3}$

Exercice 3 0

Exercice 4 (i) 1

(ii) $\frac{8}{3}$

(iii) $\frac{1}{2}$

(iv) -1

Exercice 8 (i) $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{21}x^7 + o(|x|^7)$

(ii) $x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6 + o(|x|^8)$.

Exercice 9 $\frac{13}{3} - \log(7) + \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$