

**Remarque**

Certains exercices consistent en des questions de type Vrai ou Faux (V/F). Pour chaque question, répondre VRAI si l'affirmation est toujours vraie ou par FAUX si elle n'est pas toujours vraie.

**Exercice 1.**

Déterminer le développement limité d'ordre 3 des fonctions  $f$  suivantes autour de  $x_0 = 0$ .

$$(i) \quad f(x) = \sin(3x)$$

$$(ii) \quad f(x) = \log(2 + x)$$

**Exercice 2.**

Trouver le développement limité d'ordre  $n$  autour de  $x_0 = 0$  de fonctions  $f$  suivantes :

$$(i) \quad f(x) = \log(\cos(x)) \quad (n = 4)$$

$$(ii) \quad f(x) = e^{\sin(x)} \quad (n = 4)$$

$$(iii) \quad f(x) = \sqrt{1 + \sin(x)} \quad (n = 3)$$

**Exercice 3.**

En utilisant des développements limités d'ordre convenable autour de 0, calculer les limites suivantes :

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^5} \left( x - \frac{x^3}{6} - \sin(x) \right)$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin(x) - \cos(x) - 2x}{x - \log(1 + x)}$$

$$(iii) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(\sin(x)) - \sin(x)^2}{x^6}$$

**Exercice 4.**

Calculer le développement limité d'ordre 4 autour de  $x_0 = \frac{\pi}{3}$  de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1 + \cos(x)}.$$

**Remarque.**

L'idée n'est pas de dériver la fonction donnée, mais de se baser sur des développements limités (DL) autour de 0 qui sont bien connus.

**Exercice 5.**

Pour  $x \in \mathbb{R}$  on considère la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\cos(x) - 1) - \cos(\sin(x)) + 1}{x^4} & \text{pour } x \neq 0, \\ c & \text{pour } x = 0. \end{cases}$$

Quelle est la valeur de  $c \in \mathbb{R}$  pour que  $f$  soit continue en  $x = 0$  ?

☐ 0

☐  $-\frac{1}{6}$

☐  $\frac{1}{2}$

☐  $\frac{1}{4}$

**Exercice 6.**

Soient  $b, c \in \mathbb{R}$ ,  $I = ]-1, 1[$  et  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f(x) = bx + cx^2 + o(|x|^4)$ .

Vrai ou Faux ?

Q1 :  $f$  est continue en  $x = 0$ .

Q2 :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = b$ .

Q3 :  $f$  est dérivable en  $x = 0$ .

Q4 :  $f \in C^1(I)$ .

Q5 : Si  $f \in C^2(I)$ , alors  $f''(0) = c$ .

Q6 :  $f(x)^2 = b^2x^2 + c^2x^4 + o(|x|^6)$ .

**Exercice 7.**

Trouver les séries de Taylor des fonctions  $f$  suivantes et déterminer un intervalle où  $f$  est égale à sa série de Taylor :

$$(i) f(x) = \sin(x)$$

$$(iv) f(x) = e^{-x}$$

$$(vii) f(x) = \log(1+x)$$

$$(ii) f(x) = \cos(x)$$

$$(v) f(x) = \sinh(x)$$

$$(viii) f(x) = \log(1-x)$$

$$(iii) f(x) = e^x$$

$$(vi) f(x) = \cosh(x)$$

**Exercice 8.**

Soit  $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \sin(x)$ .

En utilisant la formule de Taylor, montrer que si on remplace  $f$  par le polynôme de son développement limité d'ordre 15 autour de 0, c'est-à-dire si on remplace  $f$  par

$$\sum_{k=0}^{15} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k,$$

l'erreur qu'on commet est plus petite que  $10^{-8}$ .

Indication : utiliser le fait que

$$\frac{2^{16}}{16!} < 10^{-8}.$$

**Exercice 9.**

Pour les fonctions suivantes, déterminer si elles sont convexes ou concaves et justifier la réponse.

$$(i) f: [-3, -1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ définie par } f(x) = x^3.$$

$$(ii) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ définie par } f(x) = \frac{x^4}{2} + 14x.$$

$$(iii) f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R} \text{ définie par } f(x) = \cos(x).$$

$$(iv) f: ]-1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} \text{ définie par } f(x) = \frac{x}{x+1}.$$

$$(v) f: ]-\infty, -1[ \rightarrow \mathbb{R} \text{ définie par } f(x) = \frac{x}{x+1}.$$

**Exercice 10.**

Donner les développements limités d'ordre 2 des fonctions  $f$  suivantes autour de  $x_0$ . Le but de cet exercice est d'utiliser les développements de fonctions connues et d'utiliser des feintes du loup<sup>TM</sup> et des feintes du bison<sup>TM</sup>.

$$(i) f(x) = \frac{1}{1-x} \quad (x_0 = 3)$$

$$(ii) f(x) = e^x \quad (x_0 = 2)$$

$$(iii) f(x) = \log(3+x) \quad (x_0 = 0)$$

$$(iv) f(x) = \frac{1}{3x-5} \quad (x_0 = 1)$$

$$(v) f(x) = \frac{1}{3x+2} \quad (x_0 = 1)$$

# Solution des exercices calculatoires

Exercice 1 (i)  $3x - \frac{9}{2}x^3 + o(|x|^3)$

(ii)  $\log(2) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + o(|x|^3)$

Exercice 2 (i)  $-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(|x|^4)$

(ii)  $1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(|x|^4)$

(iii)  $1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + o(|x|^3)$

Exercice 3 (i)  $-\frac{1}{120}$

(ii)  $2$

(iii)  $\frac{1}{18}$

Exercice 4  $\frac{2}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{9}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{9}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{13}{108}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4\right)$

Exercice 5  $-\frac{1}{6}$

Exercice 7 (i)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

(ii)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$

(iii)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$

(iv)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$

(v)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

(vi)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$

(vii)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$

(viii)  $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} x^n$

Exercice 10 (i)  $-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x-3) - \frac{1}{8}(x-3)^2 + o(|x-3|^2)$

(ii)  $e^2 + e^2(x-2) + \frac{e^2}{2}(x-2)^2 + o(|x-2|^2)$

(iii)  $\log(3) + \frac{1}{3}x - \frac{1}{18}x^2 + o(|x|^2)$

(iv)  $-\frac{1}{2} - \frac{3}{4}(x-1) - \frac{9}{8}(x-1)^2 + o(|x-1|^2)$

(v)  $\frac{1}{5} - \frac{3}{25}(x-1) + \frac{9}{125}(x-1)^2 + o(|x-1|^2)$