EPFL – Automne 2024
Analyse I – MT **Exercices**
Série 10 18 novembre 2024
Questions durant la session du 25 novembre

Remarque
Certains exercices consistent en des questions de type Vrai ou Faux (V/F). Pour chaque question, répondre VRAI si l'affirmation est toujours vraie ou par FAUX si elle n'est pas toujours vraie.

Exercice (À rendre (manuscrit ou à l'ordinateur) au cours du 25 ou 27 novembre ou déposer dans le casier “Sébastien Ott” en salle MA B2 474 jusqu'au 27 novembre 12 :00. **Pas de rendu par mail**. Agrafer les feuilles si plus d'une feuille)**.**
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction donnée par

$$f(x)=\begin{cases}\arctan(x)+\sin(x) & \text{si } x\geq 0,\\ \sin(2x) & \text{si } x<0.\end{cases}$$

Montrer que

1. f est continue ;
2. pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)<1+\frac{\pi}{2}$;
3. pour tout $a\in(0,1+\frac{\pi}{2})$ et tout $r\in(0,+\infty)$, il existe $x\in(r,+\infty)$ tel que $f(x)\geq a$;
4. il existe $x\in[0,+\infty)$ tel que $f(x)=2$ (vous pouvez utiliser le point précédent) ;
5. f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Finalement,

6. Est-ce que f est dérivable en 0 ? Si oui, calculer la dérivée, si non, justifier.

Exercice 1.
Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que

(i) f paire $\Rightarrow$ f' impaire

(ii) f impaire $\Rightarrow$ f' paire

(iii) f périodique $\Rightarrow$ f' périodique

Exercice 2.
Soit la fonction $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=|x|+e^x$. Determiner l'expression de f', là où elle existe.

Exercice 3.
En partant de la définition, calculer la dérivée f' des fonctions f suivantes.

(i) $f(x)=\sin(2x)$ (ii) $f(x)=\cos(2x)$

Exercice 4.
Déterminer $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tels que la fonction $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ soit dérivable partout, où :

$$f(x)=\begin{cases}x^2-x+3\,, & x\leq 1\\ \alpha x+\beta\,, & x>1\end{cases}$$

Exercice 5.
Calculer la dérivée f' des fonctions f suivantes et donner les domaines de f et f'.

$(i)\ \ f(x) = \dfrac{5x+2}{3x^2-1}$ $\qquad$ $(ii)\ \ f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad$ $(iii)\ \ f(x) = \sin(x)^2\cos(x^2)$

Exercice 6.
Dans les trois cas suivants, déterminer $f^{(n)}$, la dérivée d'ordre n de la fonction f (pas besoin de démontrer que votre formule pour $f^{(n)}$ est correcte, il faut juste la trouver) :

$(i)\ \ f(x) = x^m \quad (m \in \mathbb{Z})$ $\qquad$ $(ii)\ \ f(x) = \sin(2x) + 2\cos(x)$ $\qquad$ $(iii)\ \ f(x) = \log(x)$

Exercice 7.
Calculer $(g \circ f)'(0)$ pour les fonctions f et g suivantes.

$(i)\ \ f(x) = 2x + 3 + (e^x - 1)\sin(x)^7\cos(x)^4 \qquad$ et $\qquad g(x) = \log(x)^3.$

$(ii)\ \ f(x) = \begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) + 2x\,, & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases} \qquad$ et $\qquad g(x) = (x-1)^4.$

Exercice 8.
Soient $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions.
Vrai ou Faux ?

Q1 : Si f est dérivable en $a \in \mathbb{R}$, alors il existe $\delta > 0$ tel que f est continue sur $]a-\delta, a+\delta[$.

Q2 : Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors $g(x) = \sqrt{f^2(x)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9.
<u>Note</u> : plus d'information sur la croissance logistique dans le livre "Mathematics for the Life Sciences", Bodine, Lenhart et Gross.

La taille d'une population dans un environnement aux ressources limitées est souvent modélisée par

$$f(x) = \frac{KP_0\,e^{rx}}{K + P_0(e^{rx}-1)},$$

où x représente le temps et f le nombre d'individus de la population. K est appelée la capacité de charge (*carrying capacity*) de l'environnement. P_0 est la taille initiale de la population et r est le taux de croissance de la population. Pour que cette modélisation ait du sens, toutes les quantités introduites prennent des valeurs réelles positives.

1. Étudier la monotonie de la fonction f.
2. Calculer $\lim_{x\to\infty} f(x)$.
3. Supposons que $P_0 \leq K/2$. Utiliser le théorème de la valeur intermédiaire pour montrer qu'il existe $c \geq 0$ tel que $f(c) = K/2$.
4. Calculer la fonction $f'(x)$ et exprimer $f'(x)$ en faisant apparaître $f(x)$.
5. Calculer la dérivée de f au point c.
6. Esquisser le graphe de f.

Exercice 10.
Calculer la dérivée f' des fonctions f suivantes et donner les domaines de f et f'.

$(i)\ \ f(x) = \tan(x) \quad$ (<u>sans formulaire !</u>)

$(ii)\ \ f(x) = \sqrt{\sin\left(\sqrt{\sin(x)}\right)}$

$(iii)\ \ f(x) = \sqrt[5]{\left(2x^4 + e^{-(4x+3)}\right)^3}$

$(iv)\ \ f(x) = \log_3(\cosh(x))$

$(v)\ \ f(x) = \log\left(4^{\sin(x)}\right)e^{\cos(4x)}$

Exercice 11.
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction injective sur l'intervalle $I \subset D(f)$. Étudier la dérivabilité de la fonction réciproque f^{-1} et calculer sa fonction dérivée.

(i) $f(x) = \sin(x)$ sur $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

(ii) $f(x) = \cos(x)$ sur $I = [0, \pi]$

(iii) $f(x) = e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$

(iv) $f(x) = a^x$ avec $a = \frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}$

(v) $f(x) = \sinh(x)$ sur $\mathbb{R}$

(vi) $f(x) = \cosh(x)$ sur $I = [0, \infty[$

(vii) $f(x) = \tanh(x)$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 12.
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.
Vrai ou Faux ?

Q1 : Si $f(x) = x + e^x$, alors $(f^{-1})'(1) = 1 + \frac{1}{e}$.

Q2 : Si f est dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, alors f' est continue sur I.

Q3 : Si f est dérivable à gauche et à droite en $a \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a.

Q4 : Si $f(x) = x^2 - 2x$, alors $(f \circ f)'(1) = 0$.

Q5 : Tout polynôme est dérivable une infinité de fois.

Q6 : Si f est bijective et dérivable alors $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective.

Solution des exercices calculatoires

Exercice 5 (*i*) $-\dfrac{15x^2+12x+5}{(3x^2-1)^2}$

(*ii*) $\dfrac{x(2-x^2)}{(1-x^2)^{3/2}}$

(*iii*) $2\sin(x)\left(\cos(x)\cos(x^2)-x\sin(x)\sin(x^2)\right)$

Exercice 7 (*i*) $2\log(3)^2$

(*ii*) -8

Exercice 9 (*ii*) K

(*v*) $\dfrac{rK}{4}$

Exercice 10 (*i*) $\dfrac{1}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x)$

(*ii*) $\dfrac{\cos\left(\sqrt{\sin(x)}\right)\cos(x)}{4\sqrt{\sin\left(\sqrt{\sin(x)}\right)}\sqrt{\sin(x)}}$

(*iii*) $\dfrac{12\left(2x^3-e^{-(4x+3)}\right)}{5\sqrt[5]{\left(2x^4+e^{-(4x+3)}\right)^2}}$

(*iv*) $\dfrac{\tanh(x)}{\log(3)}$

(*v*) $\log(4)e^{\cos(4x)}\left(\cos(x)-4\sin(x)\sin(4x)\right))$

Exercice 11 On donne $(f^{-1})'(x)$:

(*i*) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(*ii*) $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(*iii*) $-\dfrac{1}{x}$

(*iv*) $-\dfrac{1}{x\log 2}$

(*v*) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

(*vi*) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

(*vii*) $\dfrac{1}{1-x^2}$