Analyse I

Sébastien Ott

Automne 2024

EPFL

Informations logistiques

Informations générales, cours

Les cours ont lieu :

lundi de 8 :15 à 10 :00, CM 1 3,
mercredi de 8 :15 à 10 :00, CO 1.

Les infos, supports, liens ressources, etc. sont sur moodle.

Le cours sera mixte slides/tableau noir.

Les ressources disponibles sur moodle incluent :

- les références de livres couvrant la matière vue en cours,
- un MOOC (cours vidéo) couvrant la matière vue en cours et les notes de cours associées,
- un lien vers le polycopié interactif développé par Sasha Friedli (EPFL) qui couvre la matière vue en cours,
- les slides du cours.

Informations générales, exercices

Les sessions d'exercices ont lieu les lundi de 10 :15 à 12 :00 dans les salles CM 0 10, CM 0 11, CM 0 9, CM 1 100, CM 1 106, CM 1 121, CO 120, CO 123 et CO 124. Il y aura des assistants pour répondre à vos questions dans les salles CM 0 10, CM 0 9, CM 1 100, CM 1 106, CO 120, CO 123 et CO 124. Les salles CM 0 11 et CM 1 121 sont disponibles pour ceux qui veulent travailler dans leur coin (seul ou en groupe).

La série n est disponible la semaine n et est à préparer pour la semaine $n+1$. Le corrigé sera disponible le mardi de la semaine $n+1$.

Il y aura des exercices que vous pourrez rendre pour avoir un retour sur votre rédaction.

Informations générales, examen

L'examen est un écris, part QCM, part rédaction “libre”.

Il y aura un examen blanc vers la mi-semestre.

Beaucoup de ressources d'examens passés existent en ligne. Vous aurez le lien vers une collection d'examens en 2ème moitié de semestre.

Si vous voulez éviter les spoilers, attendez avant de regarder ces ressources : l'examen blanc et les exercices que vous pourrez rendre seront tirés d'anciens examens.

Quelques rappels, survol du cours

Objet fondamental : les variables

Une *variable* peut être vue comme une boîte avec un label (un nom) dans laquelle on peut ranger exactement un élément. Le nom/label de la variable peut être n'importe quel symbole (en mathématique, on utilise souvent des lettres, en informatique, plutôt des chaînes de caractères/mots). On accède à la valeur stockée dans une variable en appelant son nom.

La *valeur de la variable* est l'élément qui est stocké dans notre variable. On peut par exemple décrire une fonction numérique en disant quelle opération elle applique à *la valeur* d'une variable quand cette variable n'est autorisé à contenir que des nombres : la fonction qui associe à un nombre son carré peut être décrite à l'aide d'une variable x via

$$f(x) = x^2 = x \cdot x.$$

Deux notations réccurentes

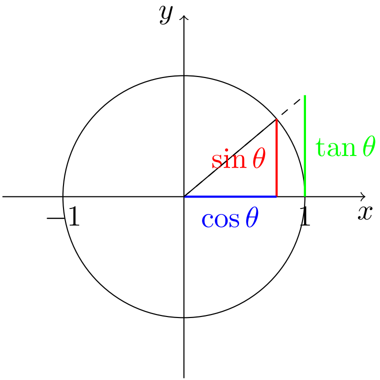
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n,$$

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_{n-1} \cdot a_n.$$

On reverra cette notation plus en détail plus tard.

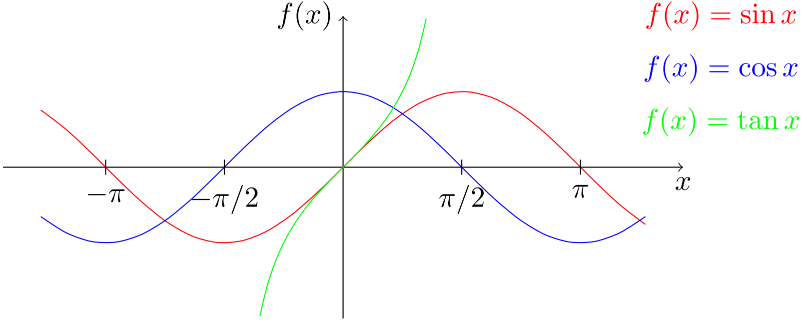
Les fonctions trigonométriques

Fonctions sin, cos, tan :



Pythagore : $(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$.

Les fonctions trigonométriques



Les fonctions puissances

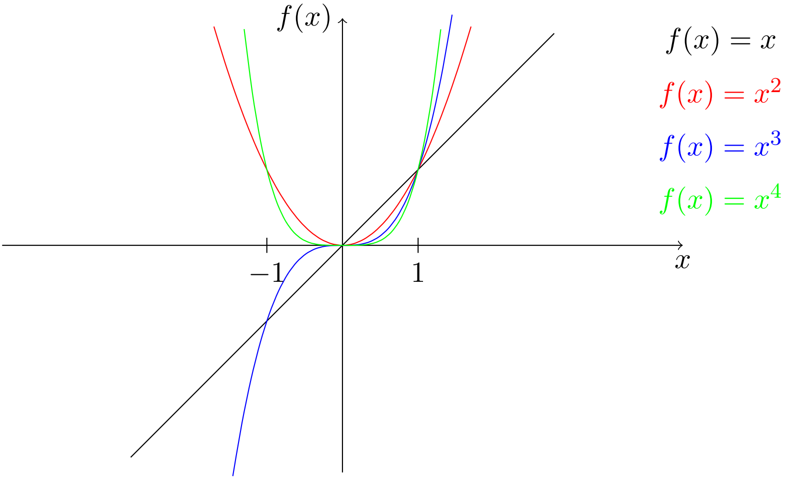
Pour un entier n et un nombre x, on définit

$$x^n = \prod_{k=1}^{n} x = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{n \text{ fois}}.$$

On se rappel des *identités remarquables* dans le cas $n = 2$:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2, \quad (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2,$$
$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2.$$

Les fonctions puissances



Logarithme et exponentielle

Définies par :

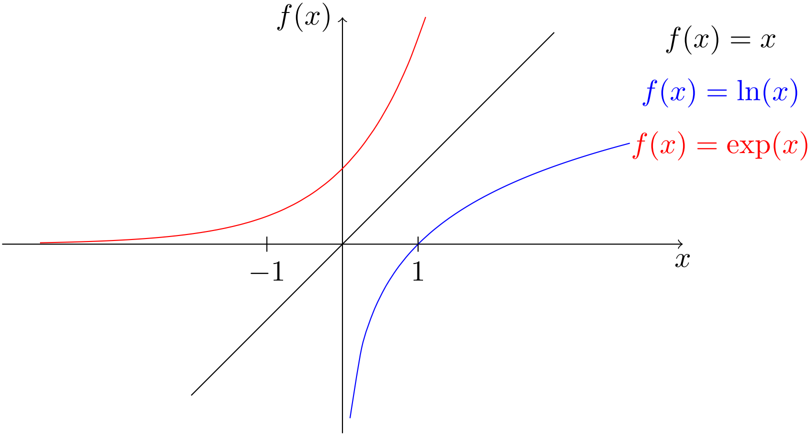
$$\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty), \quad \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$
$$\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad \ln(\exp(x)) = \exp(\ln(x)) = 1.$$

On verra comment faire du sens de la somme infinie dans la définition de l'exponentielle, et que sa réciproque, ln, est bien définie.
Elles ont les propriétés (quand les expressions ont du sens)

$$\exp(x) = e^x,\ x^y = \exp(y \ln(x)),\ \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$
$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y),\ \ln(x^y) = y\ln(x),$$

où $e = 2.718\ldots$ est le *nombre d'Euler*.

Logarithme et exponentielle



Équations polynomiales

On veut résoudre pour x des équations de la forme

$$A(x) = 0,$$

où

$$A(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

avec $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. On verra comment le faire et que ce problème est équivalent à trouver des *nombres complexes* $z_1, \ldots, z_n$ tels que

$$A(x) = a_n \prod_{k=1}^{n} (x - z_k)$$

Les z_k sont appelés *racines du polynôme* A.

Logique

Le langage utilisé en mathématique est un peu moins permissif que le langage courant. On le discutera un peu en cours et la série 2 est une série de sensibilisation à ce langage.

Comme le but principal du cours est que vous soyez capables *d'appliquer* un raisonnement logique et des résultats sur les fonctions réelles, on mettra moins l'emphase sur *comment prouver les choses* et on donnera seulement une intuition sur pourquoi les résultats sont vrais et sur comment raisonner en mathématique.

Dérivée, intégrale : un exemple

On se rappel qu'un objet qui bouge en ligne droite avec une accélération constante $a(t) = a$ suit les équations de mouvement :

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2,$$
$$v(t) = v_0 + at,$$

avec $v(t), x(t)$ la vitesse et la position à l'instant t.

Dérivée, intégrale : un exemple

L'intuition derrière ces équations est : durant un (très petit) intervalle de temps $[t, t+\delta]$ la vitesse augmente proportionnellement à l'accélération à l'instant t. De la même manière, la position augmente proportionnellement à la vitesse à l'instant t. On obtient les équations

$$x(t+\delta) = x(t) + \delta v(t),$$
$$v(t+\delta) = v(t) + \delta a(t) = v(t) + \delta a.$$

En sommant les contributions de chaque petit incrément entre le temps t_1 et le temps t_2, on obtient

$$x(t_2) - x(t_1) = \sum_k \delta v(t_1 + k\delta),$$
$$v(t_2) - v(t_1) = \sum_k \delta a(t_1 + k\delta) = (t_2 - t_1)a,$$

ou les sommes vont de $k = 0$ à $k = \frac{t_2 - t_1}{\delta}$.

Dérivée, intégrale : un exemple

Ces deux procédés (regarder comment une quantité varie sur un intervalle de temps extrêmement petit et sommer les contributions de chacun de ces intervalles) correspondent (dans la limite $\delta \to 0$) aux notions de *dérivée* et d'*intégration* : on a par exemple

$$\frac{d}{dt}x(t) = v(t), \quad x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt.$$