

Intermezzo : Nombres
complexes

Les nombres complexes sont une extension des nombres réels. Une motivation pour les introduire est de pouvoir résoudre l'équation

$$x^2 = -1.$$

Comme les nombres réels n'admettent pas de solution à cette équation, on introduit un symbole, i avec la propriété algébrique

$$i^2 = -1.$$

Définition

L'ensemble des nombres complexes est défini par

$$\mathbb{C} := \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Si $z = a + ib \in \mathbb{C}$, on note $\Re(z) := a$, la *partie réelle* de z et $\Im(z) := b$, la *partie imaginaire* de z .

Deux nombres complexes sont égaux si leur parties réelle **et** imaginaire sont égales.

Les opérations d'addition et soustraction sont alors définies par

$$(a + ib) + (c + id) = (a + b) + i(c + d).$$

et

$$(a + ib) - (c + id) = (a - b) + i(c - d).$$

En mots : on additionne les parties réelles et imaginaires séparément.

La multiplication est un peu plus compliquée : on utilise la distributivité

$$\begin{aligned}(a + ib) \cdot (c + id) &= a \cdot c + a \cdot id + ib \cdot c + ib \cdot id \\ &= ac + iad + ibc + i^2bd \\ &= (ac - bd) + i(ad + bc)\end{aligned}$$

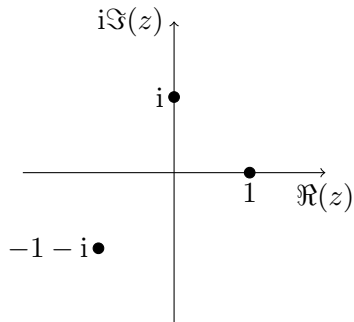
car $i^2 = -1$. Il se trouve que comme dans le cas réel, on peut inverser l'opération de multiplication sur $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

On peut donc manipuler les nombres complexes comme des réels en utilisant les règles habituelles et en utilisant $i^2 = -1$.

ATTENTION : les nombres réels viennent avec une structure d'ordre. Cette structure n'existe pas dans $\mathbb{C}$!

Représentation géométrique

On représente $\mathbb{R}$ comme une droite. Il faut deux nombres réels pour former un nombre complexe. On peut alors représenter $\mathbb{C}$ comme un plan :

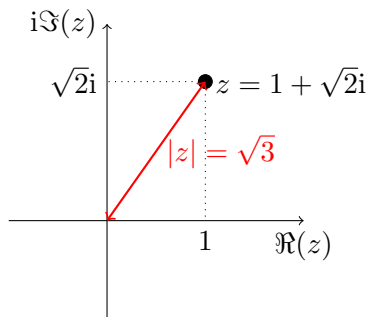


Definition

Soit $z \in \mathbb{C}$. On définit le *module* de $z = a + ib$ par

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Le module d'un nombre complexe est la longueur du vecteur correspondant dans le plan complexe :



Par Pythagore !

Le module joue le même rôle que la valeur absolue dans $\mathbb{R}$:

- $|z| \geq 0$,
- $d(z, w) = |z - w|$ est la distance entre z et w ,
- $|z + w| \leq |z| + |w|$ et donc $d(z, w) \leq d(z, v) + d(v, w)$ pour tous $z, w, v \in \mathbb{C}$.

On a aussi que si $z \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (i.e. : $z = a + 0 \cdot i = a \in \mathbb{R}$), alors $|z|$ est juste la valeur absolue usuelle.

Definition

Une suite complexe $(z_n)_{n \geq 1}$ est une liste infinie de nombre complexes $z_n \in \mathbb{C}$ pour tout $n \geq 1$. On dit que la suite $(z_n)_{n \geq 1}$ *converge vers* $z \in \mathbb{C}$, noté $z_n \rightarrow z$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, |z_n - z| \leq \epsilon.$$

REMARQUE : $z_n = a_n + ib_n$ converge vers $z = a + ib$ si et seulement si les suites $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ convergent respectivement vers a et b . On peut donc réutiliser les critères de convergence pour les suites réelles.

Definition

Soit $z \in \mathbb{C}$. On définit le *conjugué complexe* de $z = a + ib$ par

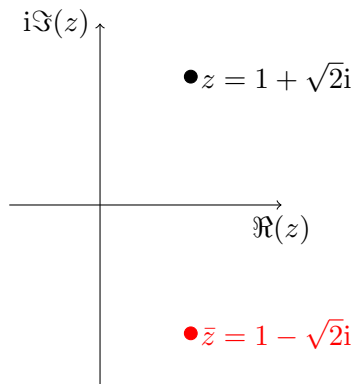
$$\bar{z} := a - ib.$$

En formule :

$$\bar{z} = \Re(z) - i\Im(z).$$

Conjugué complexe

Le conjugué complexe correspond à l'image miroir de z à travers $\mathbb{R} = \{a + 0i : a \in \mathbb{R}\}$:



Conjugué complexe

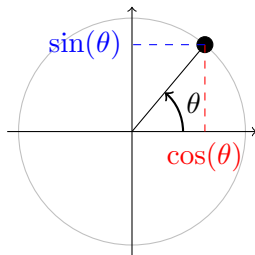
Le conjugué complexe a un certain nombre de propriétés utiles :

- $z + \bar{z} = 2\Re(z)$,
- $z - \bar{z} = i2\Im(z)$,
- $z\bar{z} = |z|^2$.

Preuves en exercices.

Forme polaire, rappel

On se rappelle la définition du sinus et cosinus d'un angle :



En particulier,

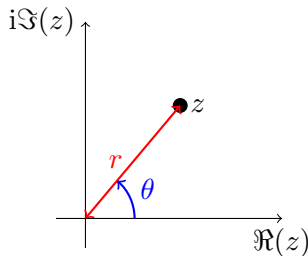
$$\cos(-\theta) = \cos(\theta), \quad \sin(-\theta) = -\sin(\theta).$$

Forme polaire

Comme on peut voir $\mathbb{C}$ comme un plan, on peut aussi écrire ses éléments sous *forme polaire* (angle-module) :

$$z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)),$$

avec $r = |z|$ le *module* de z et θ un angle entre 0 et 2π radians (ou 0 et 360 degrés) appelé *l'argument* de z .



Dans cette forme, on peut voir que multiplier par $i = 1 \cdot (\cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2))$ correspond à faire une rotation du plan par $\pi/2$ (90 degrés) :

$$\begin{aligned} r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \cdot i &= r(-\sin(\theta) + i \cos(\theta)) \\ &= r(\cos(\theta + \pi/2) + i \sin(\theta + \pi/2)). \end{aligned}$$

Plus généralement, multiplier par $z = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ (un nombre complexe de module 1, ou *phase*) revient à faire une rotation d'angle θ autour de 0.

Forme exponentielle

La dernière manière d'écrire les nombres complexes est la *forme exponentielle* qui utilise les mêmes paramètres que la forme polaire :

$$z = re^{i\theta} = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)).$$

On verra plus tard comment on peut justifier l'égalité

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

De l'égalité

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta),$$

(version exponentielle de la formule d'Euler) et de $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$, $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$, on déduit la version trigonométrique des formules d'Euler :

$$\begin{aligned}\cos(\theta) &= \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}), \\ \sin(\theta) &= \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}).\end{aligned}$$

Exercice : vérifier ces deux égalités en utilisant la version exponentielle.

La fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ (comme fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) satisfait

- $e^{x+y} = e^x e^y$,
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$,
- $e^0 = 1$.

On peut étendre le domaine et le co-domaine de cette fonction à $\mathbb{C}$: c'est qui permet d'écrire $e^{i\theta}$ et plus généralement e^z pour $z \in \mathbb{C}$. Les propriétés ci-dessus restent vraies pour $x, y \in \mathbb{C}$. On peut aussi prendre la formule d'Euler comme *définition* de $b \mapsto e^{ib}$ (qui est donc 2π -périodique) et poser pour $a + ib \in \mathbb{C}$

On peut aussi prendre la formule d'Euler comme *définition* de $b \mapsto e^{ib}$ (qui est donc 2π -périodique) et poser pour $a + ib \in \mathbb{C}$

$$e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a (\cos(b) + i \sin(b)),$$

avec $e^a \in \mathbb{R}_+$.

La notation $re^{i\theta}$ mets en avant le fait que quand on multiplie deux nombres complexes

$$r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

on multiplie leur modules, alors que leurs arguments s'additionnent : les longueurs se multiplient et les arguments font “tourner” le plan.

Un exemple de suite venant des nombres complexes

Un exemple fréquent de suite à étudier est défini comme suit :

- on se donne une fonction $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$,
- on démarre avec un nombre $z_0 \in \mathbb{C}$,
- on définit récursivement $z_1 = f(z_0)$, $z_2 = f(z_1)$, etc. :

$$z_n = f(z_{n-1}) = f \circ f(z_{n-2}) = \cdots = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}(z_0)$$

On se demande alors ce qui se passe quand n devient grand.

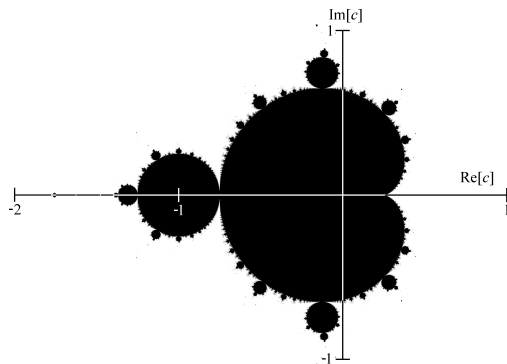
Un exemple de suite venant des nombres complexes

Si on prend par exemple $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z^2 + c$, avec $c \in \mathbb{C}$, et que l'on démarre avec $z_0 = 0$, des comportements différents sont observés selon la valeur de c :

- pour certains c , la suite $|z_n|$ diverge vers $+\infty$,
- pour d'autre, la suite $|z_n|$ reste bornée.

Un exemple de suite venant des nombres complexes

Si on dessine les points $c \in \mathbb{C}$ tels que la suite $|z_n|$ reste bornée, on obtient *l'ensemble de Mandelbrot* :



Sans les axes

