

Chapitre V : dérivée

- Définition et exemples
- Dérivée de fonctions composites
- Dérivée des fonctions trigonométriques
- Accroissements et dérivée
- Dérivées d'ordres supérieurs, approximation de Taylor
- Dérivées et limites

Rappel : limites à droite et à gauche

La version “limites” est

Definition

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit x un point d'accumulation de I . On dit que f *admet une limite à gauche (droite)* en x si il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que pour toute suite $(a_n)_{n \geq 1}$ à valeurs dans $I \cap (-\infty, x)$ ($I \cap (x, +\infty)$) telle que $a_n \rightarrow x$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = L.$$

On note alors

$$\lim_{y \rightarrow x^-} f(y) = L, \quad \lim_{y \rightarrow x^+} f(y) = L.$$

Rappel : limites à droite et à gauche

f admet une limite en x si elle admet une limite à gauche et une limite à droite et que

$$\lim_{y \rightarrow x^-} f(y) = \lim_{y \rightarrow x^+} f(y).$$

Définition et exemples

Définition : dérivée à droite et à gauche

Définition

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $x \in I$. On dit que f admet une dérivée à gauche (*à droite*) en x si

$$\lim_{y \rightarrow x^-} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}, \quad \left(\lim_{y \rightarrow x^+} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right)$$

est bien définie. La limite est alors appelée la *dérivée à gauche* (*à droite*) de f en x .

Définition : dérivée à droite et à gauche

On dit que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable à gauche (droite) si elle est dérivable à gauche (droite) en x pour tout $x \in I$.

Exemples

Quelles fonctions admettent des dérivée à gauche/droite en 0 ?

(a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|;$

(b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2;$

(c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 0, \\ x & \text{si } x \leq 0; \end{cases}$$

(d) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ x - 1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Au tableau.

Définition

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $x \in I$. On dit que f *admet une dérivée* en x si elle admet une dérivée à gauche et une dérivée à droite et que les deux sont égales. De façon équivalente, f est dérivable en $x \in I$ si

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

est bien définie. La limite est alors appelée la *dérivée* de f en x et est notée $f'(x)$.

Définition : dérivée

On dit que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable si elle est dérivable en x pour tout $x \in I$. On note alors $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction qui à chaque x associe la dérivée de f en x .

Exemples

Quelles fonctions sont dérivables en 0 ?

(a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|;$

(b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2;$

(c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 0, \\ x & \text{si } x \leq 0; \end{cases}$$

(d) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ x - 1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Au tableau.

- (1) Dérivable à gauche/droite en x implique continue à gauche/droite en x .
- (2) Dérivable en x implique continue en x .

Exemples

- (a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$ est dérivable et $f'(x) = nx^{n-1}$.
- (b) $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable et $\exp'(x) = \exp(x)$.
- (c) $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1/x$ est dérivable et $f'(x) = -1/x^2$.

Au tableau (ou sur slides suivants).

$$f(x) = x^n$$

On a (voir série 8 ex 5 pour la première égalité)

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{y^n - x^n}{(y - x)} = \lim_{y \rightarrow x} \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \lim_{y \rightarrow x} x^k y^{n-k-1} = nx^{n-1}.$$

Donc $x \mapsto x^n$ est dérivable et sa dérivée est $x \mapsto nx^{n-1}$.

$$f(x) = \exp(x)$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On calcule

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{e^y - e^x}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} e^x \frac{e^{y-x} - 1}{y - x} = e^x \lim_{y \rightarrow x} \frac{e^{y-x} - 1}{y - x}.$$

Maintenant,

$$\frac{e^{y-x} - 1}{(y-x)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(y-x)^k}{k!(y-x)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(y-x)^{k-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(y-x)^k}{(k+1)!}.$$

Il suffit de montrer que $\lim_{y \rightarrow x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(y-x)^k}{(k+1)!} = 1$ pour conclure.

$$f(x) = \exp(x)$$

On a,

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(y-x)^k}{(k+1)!} - 1 \right| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(y-x)^k}{(k+1)!} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|y-x|^k}{(k+1)!}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|y-x|^k}{(k+1)!} &= |y-x| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|y-x|^{k-1}}{(k+1)!} \\ &\leq |y-x| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|y-x|^k}{k!} = |y-x| e^{|y-x|}. \end{aligned}$$

La fonction $y \mapsto |y-x|e^{|y-x|}$ est continue (produit et composition de fonctions continues), donc

$$\lim_{y \rightarrow x} |y-x|e^{|y-x|} = \left| \lim_{y \rightarrow x} y - x \right| e^{\lim_{y \rightarrow x} |y-x|} = 0,$$

ce qui donne que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(y-x)^k}{(k+1)!}$ tend vers 1 quand y tend vers x .

$$f(x) = 1/x$$

On calcule pour $x \neq 0$,

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{\frac{1}{y} - \frac{1}{x}}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{1}{xy} \frac{x - y}{y - x} = -\frac{1}{x^2}$$

car $\frac{x-y}{y-x} = -1$ et $1/y$ tend vers $1/x$ quand $y \rightarrow x$ car $x \neq 0$.

On notera $o(t)$ une quantité (fonction) qui est *négligeable devant t en 0* :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(t)}{t} = 0.$$

Plus généralement, on notera $o(t^n)$ une quantité telle que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(t^n)}{t^n} = 0.$$

On verra que pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $n, m \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} o(t^n) + o(t^m) &= o(t^{\min(n,m)}), & \lambda o(t^n) &= o(t^n), \\ o(t^n)o(t^m) &= o(t^{n+m}), & t^n o(t^m) &= o(t^{n+m}). \end{aligned}$$

Theorem

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. f est dérivable en x_0 si et seulement si il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$,

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + o(x - x_0).$$

On a alors que $f'(x_0) = a$.

Supposons que f est dérivable en x_0 . On a alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0),$$

et donc, par propriété des limites,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)} \\ = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)} \\ = f'(x_0) - f'(x_0) = 0, \end{aligned}$$

d'où

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0).$$

Dans l'autre direction, supposons que

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + o(x - x_0).$$

Alors,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0) + a(x - x_0) + o(x - x_0) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(a + \frac{o(x - x_0)}{x - x_0} \right) = a. \end{aligned}$$

Dérivées de fonctions composites

Theorem

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, si f, g sont dérivables en x_0 ,

- $f + g$ est dérivable en x_0 et $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$;*
- λf est dérivable en x_0 et $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$.*

Le théorème reste vrai si on remplace “dérivable” par “dérivable à gauche/droite”.

Comme f, g sont dérivable en x_0 , on a

$$\begin{aligned}f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \\g(x) &= g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).\end{aligned}$$

En particulier, comme $o(t) + o(t) = o(t)$ car

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(t) + o(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(t)}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(t)}{t} = 0,$$

on a

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\&= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) + g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \\&= (f + g)(x_0) + (f'(x_0) + g'(x_0))(x - x_0) + o(x - x_0).\end{aligned}$$

Comme f est dérivable en x_0 , on a

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

En particulier, comme $\lambda o(t) = o(t)$ car

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lambda o(t)}{t} = \lambda \lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(t)}{t} = 0,$$

on a

$$\begin{aligned} (\lambda f)(x) &= \lambda f(x) = \lambda f(x_0) + \lambda f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \\ &= (\lambda f)(x_0) + \lambda f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \end{aligned}$$

d'où $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$.

Les polynômes sont dérivables et la dérivée de $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ est

$$p'(x) = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1}.$$

Theorem

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f(I) \subset J$. Soit $x_0 \in I$. Alors, si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$, $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en x_0 , et

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Le théorème reste vrai si on remplace “ f dérivable” par “ f dérivable à gauche/droite”.

Comme f, g sont dérivable en $x_0, f(x_0)$, on a

$$\begin{aligned}f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \\g(y) &= g(f(x_0)) + g'(f(x_0))(y - f(x_0)) + o(y - f(x_0)).\end{aligned}$$

On obtient que $(g \circ f)(x)$ vaut

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0))(f(x) - f(x_0)) + o(f(x) - f(x_0)).$$

Mais

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0),$$

donc

$$(g \circ f)(x) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0))f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

Theorem

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$. Alors, si f, g sont dérivables en x_0 ,

- $f \cdot g$ est dérivable en x_0 et

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0);$$

- si $g(x_0) \neq 0$ et $g'(x_0) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Le théorème reste vrai si on remplace “dérivable” par “dérivable à gauche/droite”.

Comme f, g sont dérivable en x_0 , on a

$$\begin{aligned}f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \\g(x) &= g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).\end{aligned}$$

Ceci implique

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x) &= f(x)g(x) \\&= (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0))(g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)) \\&= f(x_0)g(x_0) + (f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0))(x - x_0) + o(x - x_0),\end{aligned}$$

qui est le résultat voulu.

Comme f, g sont dérivable en x_0 , et que $\frac{f}{g}$ est le produit que f avec $h \circ g$ où $h(x) = 1/x$, on obtient que $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et que

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = (f \cdot (h \circ g))'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} + f(x_0)(h \circ g)'(x_0).$$

Maintenant, la dérivée de $h \circ g$ est

$$(h \circ g)'(x_0) = h'(g(x_0))g'(x_0) = \frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2},$$

ce qui permet de conclure.

Theorem

Soient $f : I \rightarrow J$ une fonction bijective. Soit $x_0 \in I$. Alors, si f est dérivable en x_0 , sa réciproque f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Sans preuve.

Application : l'exponentielle comme (une autre) limite

On va montrer que pour n'importe quel $x \in \mathbb{R}$, on peut obtenir e^x comme

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

On commence par ré-écrire

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right).$$

Comme $\ln$ est la réciproque de $\exp$, elle est dérivable et sa dérivée est

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}$$

Application : l'exponentielle comme (une autre) limite

En particulier, $\ln$ est dérivable en 1 et $\ln'(1) = 1$, ce qui donne

$$\ln(y) = \ln(1) + \ln'(1)(y - 1) + o(y - 1) = (y - 1) + o(y - 1)$$

car $\ln(1) = 0$.

On obtient

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n\left(\frac{x}{n} + o(x/n)\right)\right) = e^x \exp\left(n o(x/n)\right).$$

On a alors que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n o(x/n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x \frac{o(x/n)}{x/n} = \lim_{t \rightarrow 0} x \frac{o(t)}{t} = 0.$$

Application : l'exponentielle comme (une autre) limite

En réunissant les ingrédients,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^x \exp\left(\text{no}(x/n)\right) \\ &= e^x \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(\text{no}(x/n)\right) = e^x \exp\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \text{no}(x/n)\right) \\ &= e^x e^0 = e^x,\end{aligned}$$

car $\exp$ est continue.

Dérivée des fonctions trigonométriques

On va montrer

- $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable et $\sin' = \cos$,
- $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable et $\cos' = -\sin$,
- $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable et $\tan' = \frac{1}{\cos^2}$.

On aura besoin des points suivants

- 1) $\sin(x)/x$ est pair et positive (en tout cas sur $\mathbb{R}^*$),
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ (voir slides suivants),
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$ (voir slides suivants),
- 4) les formules pour $\sin$ et $\cos$ (voir série 2 ex 11) :

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y),$$

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y),$$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

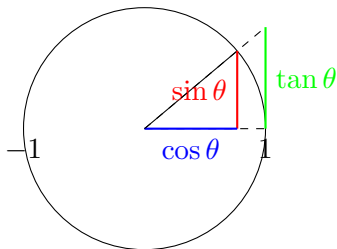
On va utiliser le théorème des gendarmes : pour $x \in (-\pi/2, \pi/2) \setminus \{0\}$ (voir slide suivant)

$$\frac{1}{\cos(x)} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \cos(x).$$

On a alors que la limite du terme du milieu est “coincée” entre les limites des termes de gauche et droite. Comme $\cos$ est continu et que $\cos(0) = 1 \neq 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1} = 1.$$

Pour trouver les majorations/minorations on utilise



On a que l'aire de la portion de cercle délimitée par l'angle θ est $\theta/(2\pi)$ fois l'aire du cercle (π). Cette aire est plus petite que l'aire du triangle $(0,0) - (1,0) - (1, \tan(\theta))$ et plus grande que l'aire du triangle $(0,0) - (\cos(\theta), 0) - (\cos(\theta), \sin(\theta))$. Traduit en formules, cela donne

$$\frac{\cos(\theta) \sin(\theta)}{2} \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{\tan(\theta)}{2}$$

Pour $\theta \in (0, \pi/2)$, on utilise $\tan(\theta) = \sin(\theta)/\cos(\theta)$ on ré-arrange pour obtenir (tous les termes sont > 0),

$$\cos(\theta) \leq \frac{\theta}{\sin(\theta)} \leq \frac{1}{\cos(\theta)}.$$

Les trois termes étant paires, on a la même chaîne d'inégalités pour $\theta \in (-\pi/2, 0)$. Tous les termes étant > 0 , on peut prendre l'inverse de chacun pour renverser les inégalités et obtenir

$$\frac{1}{\cos(\theta)} \leq \frac{\sin(\theta)}{\theta} \leq \cos(\theta).$$

Limite de $(1 - \cos(x))/x$

On a (en multipliant par $1 + \cos(x)$ en haut et en bas)

$$\frac{1 - \cos(x)}{x} = \frac{1 - \cos^2(x)}{x(1 + \cos(x))} = \frac{\sin^2(x)}{x(1 + \cos(x))}.$$

On a alors

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \sin(x) \frac{1}{1 + \cos(x)} = 1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} = 0,$$

(limite de produit de fonctions qui admettent des limites).

Dérivée des fonctions trigonométriques : sin

On utilise les formules d'addition pour obtenir ($y = x + (y - x)$)

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow x} \frac{\sin(y) - \sin(x)}{y - x} \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{\sin(x) \cos(y - x) + \cos(x) \sin(y - x) - \sin(x)}{y - x} \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{\sin(x)(\cos(y - x) - 1)}{y - x} + \frac{\cos(x) \sin(y - x)}{y - x} \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\sin(x)(\cos(\delta) - 1)}{\delta} + \frac{\cos(x) \sin(\delta)}{\delta} = 0 + \cos(x), \end{aligned}$$

(somme de fonctions qui admettent des limites).

On procède de la même façon

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow x} \frac{\cos(y) - \cos(x)}{y - x} \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{\cos(x) \cos(y - x) - \sin(x) \sin(y - x) - \cos(x)}{y - x} \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{\cos(x)(\cos(y - x) - 1)}{y - x} - \frac{\sin(x) \sin(y - x)}{y - x} \\ &= 0 - \sin(x). \end{aligned}$$

Dérivée des fonctions trigonométriques : tan

$\tan = \frac{\sin}{\cos}$ est une fonction composite de fonctions dérivables. De plus, $\cos$ est non-zéro sur le domaine de $\tan$. Donc (dérivée de quotient) :

$$\tan' = \left(\frac{\sin}{\cos} \right)' = \frac{\sin' \cos - \sin \cos'}{\cos^2} = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2}.$$

Dérivée des fonctions trigonométriques réciproques

On applique alors le théorème sur la dérivée des fonctions réciproques pour obtenir :

- $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable et

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

- $\arccos : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable et

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sin(\arccos(x))} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},$$

- $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable et

$$\arctan'(x) = \cos^2(\arctan(x)) = \frac{1}{1+x^2}.$$

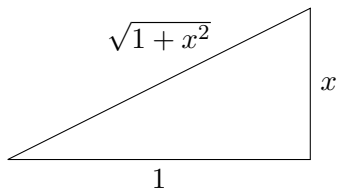
Les secondes égalités des deux premiers cas suivent de $\cos^2(y) + \sin^2(y) = 1$ avec $y \in \{\arcsin(x), \arccos(x)\}$, qui donnent

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}, \quad \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}.$$

La dernière égalité vient de

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}},$$

qui vient de la définition de $\cos, \sin, \tan$ appliquée au triangle (avec l'angle en bas à gauche qui est $\arctan(x)$)



En exercice pour les motivés.

Accroissements et dérivée

Definition

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ avec I un intervalle. On dit que $x_0 \in I$ est

- un *maximum local* de f si il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$\sup_{x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \cap I} f(x) = f(x_0),$$

- un *minimum local* de f si il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$\inf_{x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \cap I} f(x) = f(x_0),$$

- un *extremum local* de f si c'est un maximum ou un minimum local.

Quels sont les maxima/minima des fonctions (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$)

a) $x \mapsto \sin(x)$?

b) $x \mapsto \cos(x)$?

c) $x \mapsto x^4$?

d) $x \mapsto 1 - x^2$?

Theorem

Soient $a < b$, $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, et $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Soit $x_0 \in (a, b)$ un extremum de f . Alors, $f'(x_0) = 0$.

Sans preuve. Idée au tableau.

La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^3$$

satisfait $f'(0) = 0$, mais 0 n'est pas un extremum de f .

On appelle un point x_0 tel que $f'(x_0) = 0$ un *point critique* de la fonction f .

Theorem

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur (a, b) , et telle que $f(a) = f(b)$. Alors, il existe $x \in (a, b)$ tel que

$$f'(x) = 0.$$

Comme f est continue sur un intervalle fermé et borné, f est bornée et atteint son sup et son inf. En d'autres mots, $f([a, b]) = [m, M]$ pour $m = \min f$, $M = \max f$ (elle atteint tous les points entre m et M par le TVI).

Si $m = M$, f est constante et donc $f' = 0$ ce qui donne le résultat. Regardons le cas $m < M$. Si $m < f(a) = f(b)$, alors il existe $x \in (a, b)$ tel que $f(x) = m$ (f atteint son inf). x est alors un minimum de f et donc $f'(x) = 0$.

Finalement, si $m = f(a)$, on a $M > f(a) = f(b)$ et il existe $x \in (a, b)$ tel que $f(x) = M$ (f atteint son sup). x est alors un maximum de f et donc $f'(x) = 0$.

Théorème des accroissements finis (TAF)

Theorem

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, et dérivable sur (a, b) . Alors, il existe $c \in (a, b)$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

On applique le théorème de Rolle à la fonction $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

g est continue (somme de fonctions continues), et dérivable sur (a, b) (somme de fonctions dérivables sur (a, b)). De plus, $g(a) = 0 = g(b)$. Par le théorème de Rolle, il existe $c \in (a, b)$ tel que

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Conséquence : monotonie et dérivée

Soient $a < b$. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur (a, b) . On a

- 1) f est croissante si et seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in (a, b)$,
- 2) si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in (a, b)$, f est strictement croissante,
- 3) f est décroissante si et seulement si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in (a, b)$,
- 4) si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in (a, b)$, f est strictement décroissante,
- 5) f est constante si et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in [a, b]$.

En exercice pour les motivés. Voir corrigé de l'exercice 2 série 11 pour certains points.

Dérivées d'ordres supérieurs, approximation de Taylor

Definition

On notera aussi $f^{(1)}$ la dérivée de f . Quand elle est bien définie, on note $f^{(2)}$ la dérivée de $f^{(1)}$, et, plus généralement, on définit par récurrence $f^{(k)}$ comme la dérivée de $f^{(k-1)}$.

On noteras $C^1(I)$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ qui sont dérivables et dont la dérivée est continue. $C^0(I)$ dénote l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$. Plus généralement, on note $C^k(I)$ l'ensemble des fonctions *k -fois continûment différentiables* : $f \in C^k(I)$ si $f^{(k)}$ est bien définie et continue. On notera $C^\infty(I)$ les fonctions qui sont dans $C^k(I)$ pour tout k .

- (a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$ est dans $C^\infty(\mathbb{R})$.
- (b) $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dans $C^\infty(\mathbb{R})$ et $\exp^{(k)}(x) = \exp(x)$ pour tout $k \geq 0$.
- (c) $\sin, \cos$ sont dans $C^\infty(\mathbb{R})$.

Au tableau (ou sur slides suivants).

$$f(x) = x^n$$

On procède par récurrence sur n . Le cas $n = 0$ est la fonction constante $= 1$ dont la dérivée est la fonction constante $= 0$ qui est sa propre dérivée (en particulier, elle est dérivable k fois pour tout $k > 0$).

Pour le pas de récurrence, supposons que $x \mapsto x^n$ est dérivable k fois pour tout $k \in \mathbb{N}$. Soit $k \in \mathbb{N}$, montrons que $x \mapsto x^{n+1}$ est dérivable k fois.

On a montré que $x \mapsto x^{n+1}$ est dérivable et que sa dérivée est donnée par la fonction $x \mapsto (n+1)x^n$, qui est un scalaire fois une fonction dérivable $k-1$ fois. Donc $x \mapsto (n+1)x^n$ est dérivable $k-1$ fois et donc $x \mapsto x^{n+1}$ est dérivable k fois. k étant quelconque, cela donne le pas de récurrence.

Comme $\exp$ est dérivable et que $\exp' = \exp$, $\exp'$ est alors dérivable avec dérivée $\exp$ et ainsi de suite pour les dérivées supérieures.

Même principe avec $\sin, \cos$: $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$.

Théorème de Taylor-Lagrange

Theorem

Soient $a < b$. Soit $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $f \in C^{n+1}((a, b))$. Alors, pour $x_0 \neq x \in (a, b)$, il existe ξ strictement entre x_0 et x tel que

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

Ce théorème généralise le théorème des accroissement finis : le TAF est juste le cas $n = 0$ du théorème de Taylor-Lagrange.

Preuve (pour les intéressés)

On suppose $x > x_0$ pour simplifier. On remarque que $(x - x_0) \neq 0$. En particulier, il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ (obtenu en résolvant l'équation pour λ) tel que

$$\frac{\lambda}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = f(x) - f(x_0) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Le théorème suit si l'on parvient à montrer que

$$\lambda = f^{(n+1)}(\xi)$$

pour un certain $x_0 < \xi < x$. On va appliquer le théorème de Rolle à une fonction bien choisie pour montrer ceci.

On introduit la fonction $\Psi : [x_0, x] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\Psi(y) = f(x) - f(y) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(y)}{k!} (x - y)^k - \frac{\lambda}{(n+1)!} (x - y)^{n+1}.$$

On a $\Psi(x) = 0$ (calcul direct) et $\Psi(x_0) = 0$ par définition de λ . De plus, Ψ est continue sur $[x_0, x]$ (somme de fonctions continues) et dérivable sur (x_0, x) (somme de fonctions dérivables). On a alors que par le théorème de Rolle, il existe $\xi \in (x_0, x)$ tel que

$$\Psi'(\xi) = 0.$$

Preuve (pour les intéressés)

Un calcul direct (en appliquant les règles de dérivation de somme, produit et composition) donne

$$\begin{aligned}\Psi'(y) &= -f'(y) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k+1)}(y)}{k!} (x-y)^k \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(y)}{(k-1)!} (x-y)^{k-1} + \frac{\lambda}{n!} (x-y)^n \\ &= -f'(y) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k+1)}(y)}{k!} (x-y)^k \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(y)}{k!} (x-y)^k + \frac{\lambda}{n!} (x-y)^n \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(y)}{n!} (x-y)^n + \frac{\lambda}{n!} (x-y)^n.\end{aligned}$$

D'où

$$0 = \Psi'(\xi) = \frac{\lambda}{n!}(x - \xi)^n - \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n$$

et donc $\lambda = f^{(n+1)}(\xi)$.

On appelle le polynôme

$$T_n(x; f, x_0) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

le *polynôme de Taylor de degré n associé à f en x_0* .

Theorem

Soit I un intervalle ouvert non-vide, $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in I$ et $f \in C^n(I)$. Alors, pour $x \in I$,

$$f(x) = T_n(x; f, x_0) + o((x - x_0)^n).$$

Approximation de Taylor : preuve

Le théorème de Taylor-Lagrange nous dit en particulier que si $f \in C^n(I)$ et que $x_0 \in I$, on a pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(\xi_x)}{n!} (x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(\xi_x) - f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \end{aligned}$$

avec ξ_x strictement entre x_0 et x . Comme $f^{(n)}$ est continue,

$$\lim_{y \rightarrow x_0} f^{(n)}(y) - f^{(n)}(x_0) = 0.$$

Comme ξ_x est entre x_0 et x , $\xi_x \rightarrow x_0$ quand $x \rightarrow x_0$ et on a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f^{(n)}(\xi_x) - f^{(n)}(x_0) = \lim_{y \rightarrow x_0} f^{(n)}(y) - f^{(n)}(x_0) = 0.$$

On a alors obtenu que

$$(f^{(n)}(\xi_x) - f^{(n)}(x_0))(x - x_0)^n = o((x - x_0)^n).$$

En mettant cette estimée dans la formule obtenue avec Taylor-Lagrange, on obtient le résultat voulu.

On peut calculer le polynôme de Taylor de $\sin$ et $\cos$ en 0 :

$$\sin^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4} \\ \cos(x) & \text{si } n \equiv 1 \pmod{4} \\ -\sin(x) & \text{si } n \equiv 2 \pmod{4} \\ -\cos(x) & \text{si } n \equiv 3 \pmod{4} \end{cases},$$

$$\cos^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4} \\ -\sin(x) & \text{si } n \equiv 1 \pmod{4} \\ -\cos(x) & \text{si } n \equiv 2 \pmod{4} \\ \sin(x) & \text{si } n \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}.$$

En utilisant $\cos(0) = 1$, $\sin(0) = 0$, on obtient les polynômes de Taylor à l'ordre n pour $\sin$:

$$\sum_{k=0}^n \frac{\sin^{(k)}(0)x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{\sin^{(2k+1)}(0)x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

et $\cos$:

$$\sum_{k=0}^n \frac{\cos^{(k)}(0)x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{\cos^{(2k)}(0)x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}.$$

Si on se rappelle de la définition de $\sin$ et $\cos$ par des séries infinies, on reconnaît la troncature de ces séries.

Digression : les fonctions hyperboliques et leurs dérivées

Les fonctions hyperboliques $\sinh, \cosh, \tanh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont données par

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),$$
$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

Des propriétés de l'exponentielle et de la définition, on déduit

- $\sinh$ est impaire, $\cosh$ est paire et $\tanh$ est impaire ;
- les trois sont dans $C^\infty(\mathbb{R})$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \cosh(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh(x) = +\infty$;
- $\sinh, \tanh$ sont croissantes sur $\mathbb{R}$. $\cosh$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et atteint son minimum en 0.

De la dérivée de l'exponentielle, on trouve

$$\sinh' = \cosh, \quad \cosh' = \sinh, \quad \tanh' = \frac{1}{\cosh^2}.$$

Si on se rappelle des identités $\sin(\theta) = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$ et $\cos(\theta) = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$, on trouve (au moins formellement)

$$\sinh(x) = -i \sin(ix), \quad \cosh(x) = \cos(ix).$$

Lien avec les fonctions trigonométriques (pour la culture)

On retrouve ce lien dans leurs polynômes de Taylor en 0. Pour $\sinh$:

$$\sum_{k=0}^n \frac{\sinh^{(k)}(0)x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

et pour $\cosh$:

$$\sum_{k=0}^n \frac{\cosh^{(k)}(0)x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

On remarque que l'on a $x^{2k+1} = -i(-1)^k(ix)^{2k+1}$ et $x^{2k} = (-1)^k(ix)^{2k}$. Les polynômes de Taylor en 0 de $\sinh$ et $\cosh$ sont donc les polynômes de Taylor en 0 de $-i \sin$ et $\cos$ évalué en ix .

Dérivées et limites

On commence avec une observation générale (que l'on a utilisé quelques fois dans des cas simples) : si $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont telles que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ est bien définie (possiblement avec $L = \pm\infty$), et que la limite $\lim_{y \rightarrow L} g(y)$ est bien définie, on a alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow L} g(y).$$

Même principe avec $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$. Dans ce cas,

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow L} g(y).$$

et pareil pour x_0^- .

Changement de variables : exemples

On a

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{y \rightarrow \infty} e^{-y},$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)}{1-x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1.$$

Theorem

Soit $I = (a, b)$ un intervalle (avec $a, b = \pm\infty$ autorisé) et $x_0 \in I \cup \{a, b\}$. Soient $f, g : I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Supposons que la limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

soit bien définie (avec $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$). Alors, si un des points suivants est vrai :

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$,
- $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = +\infty$,

on a que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. Le résultat reste vrai si on remplace les limites par des limites à droite/gauche et les dérivées par des dérivées à droite/gauche.

Sans preuve. Idée sur le slide suivant.

On regarde la cas $f(x_0) = g(x_0) = 0$ et f', g' continues en x_0 avec $g'(x_0) \neq 0$ pour simplifier. Si f, g sont dérivables en x_0 , on a

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)}{g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)} \\ &= \frac{f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)}{g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)} \\ &= \frac{f'(x_0) + \frac{o(x-x_0)}{(x-x_0)}}{g'(x_0) + \frac{o(x-x_0)}{(x-x_0)}} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.\end{aligned}$$

Pour que la limite des ratios de dérivées soit bien définie, il faut que g' soit non-zéro proche de x_0 (sur $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \setminus \{x_0\}$ pour un $\epsilon > 0$).

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ est une indéterminée de la forme $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$, et que f', g' sont dérivables en x_0 , on peut utiliser l'Hospital pour calculer la limite du ratio des dérivées (et procéder de la même façon pour les ratios de dérivée d'ordres supérieurs).

Nécessité des hypothèses

- le fait que le ratio des limites est indéterminé :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{3x+2} = \frac{2}{2} = 1, \text{ mais } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \neq 1.$$

- le fait que la limite des ratio de dérivées existe :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sin(x)}{x} \right) = 1,$$

mais

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos(x)}{1}$$

n'est pas définie.

Exemples d'application

- $f(x) = x^n, g(x) = e^x, x_0 = +\infty,$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n!}{e^x} = 0.$$

- $f(x) = \ln(x), g(x) = \frac{1}{x}, x_0 = 0,$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0.$$

- $f(x) = e^x - 1, g(x) = x^2 + x, x_0 = 0,$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2x + 1} = \frac{e^0}{1} = 1.$$

L'Hospital, faire autrement...

Il est souvent possible de se passer de la règle de l'Hospital.

Par exemple : avec l'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{2x} = \frac{1}{2}.$$

Sans l'Hospital : par Taylor-Young avec $n = 2$,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} &= \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos(0) + \cos'(0)x + \cos''(0)x^2/2 + o(x^2))}{x^2} &= \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1 + x^2/2 + o(x^2)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Avantage : dans les deux cas on doit traiter la différentiabilité des fonctions considérées. Faire sans l'Hospital (quand c'est possible) évite de vérifier les hypothèses d'indéterminée de la forme $0/0$ ou $\pm\infty/\pm\infty$ et d'existence de la limite des ratios de dérivée.

Si une suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est telle que $a_n = f(n)$ pour une fonction $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, on a que, si la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ est bien définie (possiblement $\pm\infty$), alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x).$$

Par exemple, si $a_n = \sqrt{n+8}(\sin(1/n))^2$, on a $a_n = f(n)$ avec $f(x) = \sqrt{x+8}(\sin(x))^2$.

Exemple

Si $a_n = \sqrt{n+8}(\sin(1/n))^2$, on a $a_n = f(n)$ avec $f(x) = \sqrt{x+8}(\sin(x))^2$. On étudie $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. On peut ré-écrire

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+8}(\sin(1/x))^2 = \lim_{y \rightarrow 0^+} \sqrt{1+8y} \frac{(\sin(y))^2}{\sqrt{y}}$$

si la limite de droite est bien définie. On a par continuité de la racine (réciproque de fonction continue) que

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \sqrt{1+8y} = 1.$$

Exemple

Pour $\frac{(\sin(y))^2}{\sqrt{y}}$ on peut par exemple utiliser l'Hospital (indéterminée de la forme $\frac{0}{0}$) :

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{(\sin(y))^2}{\sqrt{y}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} 2\sqrt{y} 2 \sin(y) \cos(y) = 4 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

($\sqrt{x}' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, dérivée de la réciproque), ou ré-écrire

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{(\sin(y))^2}{\sqrt{y}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \sqrt{y} \sin(y) \frac{\sin(y)}{y} = 0 \cdot 0 \cdot 1 = 0.$$

On obtient

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \sqrt{1 + 8y} \frac{(\sin(y))^2}{\sqrt{y}} = 1 \cdot 0 = 0$$

et donc $a_n \rightarrow 0$.