

Chapitre V : intégrale

- Intégrale de Riemann
- Méthodes d'intégration
- Intégrales impropres

Idée : “inverser” le processus de dérivée

L'intégrale est l'opération inverse de la dérivée : la dérivée regarde l'“accroissement instantané d'une fonction” et l'intégrale regarde “le total des valeurs de la fonction”.

Idée : calcul de l'aire signée sous la courbe

L'intégrale correspond à faire un calcul d'aire *signée* sous le graphe d'une fonction. (dessin au tableau)

L'intégrale de Riemann

Soit $[a, b]$ un intervalle *fermé* avec $a < b$. On veut définir

$$\int_a^b f(x)dx$$

comme “l’aire sous la courbe” pour des fonctions f aussi générales que possible.

On va approximer l'aire par des rectangles. Cette approximation s'appelle une *somme de Riemann*.

Definition

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Soient $n \geq 1$ un entier, $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ une suite de points et $x_k \in [t_k, t_{k-1}]$, $k = 1, \dots, n$. On appelle *somme de Riemann de f* associée à $\bar{t} = (t_0, \dots, t_n)$ et $\bar{x} = (x_0, \dots, x_n)$ la somme

$$\mathcal{S}(f, \bar{t}, \bar{x}) = \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) f(x_k).$$

Dans la définition, on appelle $\bar{t}$ une *subdivision* et $\bar{x}$ un *choix de points de référence* pour la subdivision $\bar{t}$. La quantité

$$\Delta(\bar{t}) = \max\{t_k - t_{k-1} : k = 1, \dots, n\}$$

est appelée le *pas de la subdivision* $\bar{t}$.

Notons

$$\text{Sub}_{[a,b]} = \{\bar{t} = (t_0, t_1, \dots, t_n) : n \geq 1, a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$$

l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$. Pour $\bar{t} \in \text{Sub}([a, b])$, notons

$$\text{PtsRef}_{\bar{t}} = \{\bar{x} : \bar{x} \text{ est un choix de pts de réf. pour } \bar{t}\}.$$

Définition de l'intégral

On dit que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est *Riemann-intégrable* sur $[a, b]$ si il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que pour toute suite de subdivision

$$\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots \in \text{Sub}_{[a,b]}$$

telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta(\bar{t}_n) = 0$ et toute suite de choix de points de référence

$$\bar{x}_k \in \text{PtsRef}_{\bar{t}_k}, \quad k \geq 1,$$

on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{S}(f, \bar{t}_n, \bar{x}_n) = L.$$

On dit alors que L est *l'intégrale de Riemann de f sur $[a, b]$* et on note

$$\int_a^b f(x) dx = L.$$

Deux sommes pour les contrôler toutes

Pour une subdivision $\bar{t}$, on peut définir deux sommes qui ne dépendent pas de points de référence :

$$\mathcal{S}_+(f, \bar{t}) = \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) \sup_{x \in [t_{k-1}, t_k]} f(x),$$
$$\mathcal{S}_-(f, \bar{t}) = \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) \inf_{x \in [t_{k-1}, t_k]} f(x).$$

On appelle ces sommes *sommes de Darboux supérieure et inférieure*.

Deux sommes pour les contrôler toutes

On a alors pour tout choix de points de référence $\bar{x} \in \text{PtsRef}_{\bar{t}}$,

$$\mathcal{S}_-(f, \bar{t}) \leq \mathcal{S}(f, \bar{t}, \bar{x}) \leq \mathcal{S}_+(f, \bar{t}).$$

On définit alors

$$\mathcal{S}_-(f) = \sup_{\bar{t} \in \text{Sub}_{[a,b]}} \mathcal{S}_-(f, \bar{t}), \quad \mathcal{S}_+(f) = \inf_{\bar{t} \in \text{Sub}_{[a,b]}} \mathcal{S}_+(f, \bar{t}).$$

Deux sommes pour les contrôler toutes

Theorem

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Les points suivants sont tous équivalents :

A) $\int_a^b f(x)dx$ existe ;

B) $\mathcal{S}_-(f) = \mathcal{S}_+(f)$;

C) $\forall \epsilon > 0, \exists \bar{t} \in \text{Sub}_{[a,b]}$ telle que

$$\mathcal{S}_+(f, \bar{t}) - \mathcal{S}_-(f, \bar{t}) \leq \epsilon.$$

Dans le cas B), on a alors $\int_a^b f(x)dx = \mathcal{S}_+(f)$. En particulier, si f n'est pas bornée sur $[a, b]$, elle n'est pas Riemann-intégrable sur $[a, b]$.

Sans preuve.

Quelques conventions et observations

On a défini l'intégrale de gauche à droite ($a < b$). On pose alors

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx.$$

Pour $a = b$, $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Les fonctions constantes sont intégrables et

$$\int_a^b cdx = (b - a)c.$$

Theorem

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-intégrable sur $[a, b]$ et c entre a et b . Alors, f est Riemann-intégrable sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$ et

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Idée de preuve au tableau.

Corollary

Soient $a \leq c < d \leq b$. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-intégrable sur $[a, b]$. Alors f est Riemann-intégrable sur $[c, d]$.

Theorem

Soit $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-intégrables sur $[a, b]$ telles que $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$. Alors,

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

En particulier, si $a \leq b$,

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Idée de preuve au tableau.

Theorem

Si $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sont Riemann-intégrables sur $[a, b]$, et que $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

- *$f + g$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ et*

$$\int_a^b (f + g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx;$$

- *λf est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ et*

$$\int_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx;$$

- *$f \cdot g$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$;*
- *si $\inf_{x \in [a, b]} |g(x)| > 0$, f/g est Riemann-intégrable sur $[a, b]$.*

Theorem

Soient $a < b$. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est monotone, alors f est Riemann-intégrable.

On traite f croissante. La preuve est symétrique pour f décroissante. On remarque d'abord que f est bornée : pour tout $x \in [a, b]$, $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$.

Ensuite, pour toute subdivision $\bar{t} = (a = t_0, t_1, \dots, t_n = b)$, on a

$$\mathcal{S}_+(f, \bar{t}) = \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) \sup_{x \in [t_{k-1}, t_k]} f(x) = \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) f(t_k),$$

$$\mathcal{S}_-(f, \bar{t}) = \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) \inf_{x \in [t_{k-1}, t_k]} f(x) = \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) f(t_{k-1}).$$

On utilise le critère C) du Théorème sur l'existence de l'intégrale : soit $\epsilon > 0$; on choisit la subdivision

$$t_0 = a, \quad t_1 = a + \frac{(b-a)}{n}, \dots, \quad t_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$$

$k = 1, \dots, n$ et $n \geq (f(b) - f(a))(b-a)\epsilon^{-1}$. On a alors

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_+(f; \bar{t}) - \mathcal{S}_-(f; \bar{t}) &= \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) - \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f\left(a + (k-1) \frac{b-a}{n}\right) \\ &= \frac{b-a}{n} \left(\sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right) \\ &= \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$,

- $\exp, \arctan, x^n$ sont intégrables sur $[a, b]$ car se sont des fonctions croissantes.
- si $a, b > 0$, $\ln$ est intégrable sur $[a, b]$ car c'est une fonction croissante.
- si $a, b > 0$ ou $a, b < 0$, $1/x$ est intégrable sur $[a, b]$ car c'est une fonction décroissante sur $(0, +\infty)$ et sur $(-\infty, 0)$.

Theorem

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors f est Riemann-intégrable.

Sans preuve. Remarquons quand même que f est bornée !

Application : $\sin, \cos$ sont intégrables sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Definition

Soit I un intervalle. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que F est une *primitive de f* si F est dérivable et pour tout $x \in I$,
 $F'(x) = f(x)$.

Théorème fondamental de l'intégration (TFI)

Theorem

*Soit I un intervalle et $x_0 \in I$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction **continue**. Alors,*

- 1) $F(y) = \int_{x_0}^y f(x)dx$ est bien définie pour tout $y \in I$;*
- 2) F est une primitive de f ;*
- 3) si G est une primitive de f , alors il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $G(x) = F(x) + C$ pour tout $x \in I$.*
- 4) pour tout $a, b \in I$, $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$;*

En particulier, F est continue et dérivable sur I , et pour n'importe quelle primitive G de f ,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = G(b) + C - G(a) - C = G(b) - G(a).$$

Idée de preuve de 1) et 2)

1) : f est Riemann intégrable sur $[x_0, y]$ par hypothèse, donc $F(y)$ est bien définie.

2) : On regarde

$$\begin{aligned}\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{F(y) - F(y_0)}{y - y_0} &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{1}{y - y_0} \int_{y_0}^y f(x) dx \\ &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{1}{y - y_0} \int_{y_0}^y (f(y_0) + o(x - y_0)) dx \\ &= \lim_{y \rightarrow y_0} f(y_0) + o(y - y_0) = f(y_0).\end{aligned}$$

3) : Si F, G sont deux primitives de f , on a $F' = G' = f$. Par l'absurde, supposons que $F - G$ ne soit pas constante. Alors, il existe x tel que $(F - G)'(x) \neq 0$. Mais $(F - G)' = f - f = 0$, une contradiction.

4) : Par le point 2) avec $x_0 = a$, $F(y) = \int_a^y f(x)dx$ est une primitive de f . De plus, $F(a) = 0$, donc

$$F(b) - F(a) = F(b) = \int_a^b f(x)dx.$$

On notera

$$\int f \text{ ou } \int^x f(t)dt$$

pour une primitive de f (dans le deuxième cas, une primitive de f évaluée en x).

Une égalité de la forme $\int f = F$ est à comprendre :

“ $F'(x) = f(x)$ pour x dans le domaine de définition de F et de f ”.

Une égalité de la forme $\int^x f(t)dt = F(x)$ est à comprendre :

“ $F'(x) = f(x)$ ”.

Pour prouver que F est une primitive de f , il suffit de calculer F' .

Exemples : primitive de fonctions standards

Des dérivées de fonctions rencontrées dans le chapitre sur la dérivée, on a pour $n \in \mathbb{N}$, et $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \int \sin &= -\cos, & \int \cos &= \sin, & \int \frac{1}{\cos^2} &= \tan, \\ \int^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} &= \arcsin(x), & \int^x \frac{dt}{1+t^2} &= \arctan(x), \\ \int^x t^n dt &= \frac{x^{n+1}}{n+1}, & \int \exp &= \exp, & \int^x \frac{dt}{a+t} &= \ln(|a+x|), \\ & & \int^x \ln(t) dt &= x \ln(x) - x. \end{aligned}$$

On déduit $\int^x t^\alpha dt = (\alpha+1)^{-1} x^{\alpha+1}$ pour $\alpha \neq -1$, $x > 0$ (au tableau). $\int^x \ln(t) dt$ au tableau.

Méthodes d'intégration

Pour calculer $\int_a^b f(x)dx$, on trouve une primitive F de f et on applique le TFI :

$$\int_a^b f(x)dx = [F]_a^b := F(b) - F(a).$$

Examples

$$\text{a) } \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(1) - \arctan(0) = \arctan(1).$$

$$\text{b) } \int_1^K \frac{1}{x} dx = \ln(K) - \ln(1) = \ln(K).$$

$$\text{c) } \int_2^4 x^2 dx = [x^3/3]_2^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{56}{3}.$$

Theorem

Soient $f, g \in C^1([a, b])$. Alors,

$$\int_a^b (f' \cdot g)(x) dx = [f \cdot g]_a^b - \int_a^b (f \cdot g')(x) dx.$$

Preuve : dérivable implique continue qui implique intégrable, donc $f \cdot g, f' \cdot g, f \cdot g'$ sont intégrables sur $[a, b]$. Ensuite, $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$, donc, par le TFI et la linéarité de l'intégrale,

$$[f \cdot g]_a^b = \int_a^b (f \cdot g)'(x) dx = \int_a^b (f' \cdot g)(x) dx + \int_a^b (f \cdot g')(x) dx.$$

Exemple 1

On veut calculer $\int_0^1 x e^x dx$. On dérive x et prend la primitive de e^x ($f'(x) = e^x$ et $g(x) = x$). On obtient

$$\int_0^1 x e^x dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e^1 - [e^x]_0^1 = e^0 = 1$$

Exemple 2 : intégrales de Wallis

On veut calculer $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x) dx$ pour $n \in \mathbb{N}$. On a que

$$W_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2},$$

$$W_1 = \int_0^{\pi/2} \sin(x) dx = [-\cos(x)]_0^{\pi/2} = -0 - (-1) = 1.$$

Pour $n \geq 2$, on peut utiliser

$\sin^n = \sin^{n-2} \sin^2 = \sin^{n-2}(1 - \cos^2)$ pour obtenir

$$\begin{aligned} W_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}(1 - \cos^2(x)) dx \\ &= W_{n-2} - \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} \cos^2(x) dx. \end{aligned}$$

On étudie maintenant $\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} \cos^2(x) dx$.

Exemple 2 : intégrales de Wallis

On intègre alors par parties : on dérive $\cos(x)$ et on utilise

$$\int \sin^{n-2} \cos = \frac{1}{n-1} \sin^{n-1}.$$

On obtient

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}(x) \cos^2(x) dx \\ = \left[\frac{1}{n-1} \sin^{n-1}(x) \cos(x) \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{1}{n-1} \sin^n(x) dx \\ = 0 + \frac{1}{n-1} W_n. \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'égalité du slide précédent, on obtient

$$W_n = W_{n-2} - \frac{1}{n-1} W_n, \quad W_0 = \frac{\pi}{2}, \quad W_1 = 1.$$

Exemple 2 : intégrales de Wallis

On peut résoudre la récurrence pour obtenir

$$W_{2k} = \frac{\pi}{2} \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2},$$
$$W_{2k+1} = \frac{2^{2k} (k!)^2}{(2k+1)!}.$$

Pour les motivés : à montrer par récurrence en partant de ce que l'on a obtenu.

Theorem

*Soit I un intervalle et $x_0 \in I$. Soit $n \geq 0$. Soit $f \in C^{n+1}(I)$.
Alors, pour tout $x \in I$,*

$$f(x) = T_n(x; f, x_0) + \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt.$$

Soit $x_0 \in I$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On procède par récurrence. L'hypothèse de récurrence au niveau n est

Si $f \in C^{n+1}(I)$,

$$\text{alors } f(x) = T_n(x; f, x_0) + \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt.$$

Ancrage : pour $n = 0$, si $f \in C^1(I)$, on a par le TFI

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(t) dt.$$

Comme $T_0(x; f, x_0) = f(x_0)$, cela donne le cas $n = 0$.

Pas de récurrence : Supposons l'hypothèse de récurrence au niveau n . Montrons le cas $n + 1$.

Comme $f \in C^{n+2}(I)$, $f \in C^{n+1}(I)$. Donc, par l'hypothèse de récurrence au niveau n ,

$$f(x) = T_n(x; f, x_0) + \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n dt.$$

On va intégrer le dernier terme par parties.

$$\begin{aligned}
 & \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt \\
 &= \left[-\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} (x-t)^{n+1} \right]_{x_0}^x + \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!} (x-t)^{n+1} dt \\
 &= \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} + \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!} (x-t)^{n+1} dt
 \end{aligned}$$

En particulier, on peut conclure le pas de récurrence :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= T_n(x; f, x_0) + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \\
 &\quad + \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!} (x-t)^{n+1} dt \\
 &= T_{n+1}(x; f, x_0) + \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!} (x-t)^{n+1} dt.
 \end{aligned}$$

Theorem

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-intégrable sur $[a, b]$. Si $f(x) = h(g(x))g'(x)$ pour $h \in C^0([a, b])$, $g \in C^1([a, b])$, alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b h(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} h(y)dy.$$

Preuve : si H est une primitive de h , $H \circ g$ est une primitive de f :

$$(H \circ g)'(x) = H'(g(x))g'(x) = h(g(x))g'(x) = f(x).$$

On applique alors le TFI pour conclure.

Exemples

a) Pour $f : [a, b] \rightarrow (0, +\infty)$, $\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)} dx = [\ln \circ f]_a^b$.

b) $\int_0^1 \frac{x}{1+x^4} dx$: on veut utiliser $g(x) = x^2$, $h(x) = \frac{1}{1+x^2}$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x}{1+x^4} dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+x^4} 2x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+y^2} dy \\ &= \frac{1}{2} (\arctan(1) - \arctan(0)) = \frac{\arctan(1)}{2}. \end{aligned}$$

c) $\int_a^b f(cx+d) dx = \frac{1}{c} \int_{ca}^{cb} f(y+d) dy = \frac{1}{c} \int_{ca+d}^{cb+d} f(u) du$.

Changement de variables "intuitif" (non-rigoureux) au tableau.

Theorem

Soient $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Soit I un intervalle ouvert et $g, h : I \rightarrow (a, b)$ deux fonctions dérivables. On définit $K : I \rightarrow \mathbb{R}$ via

$$K(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t) dt.$$

Alors, K est dérivable et

$$K'(x) = g'(x)f(g(x)) - h'(x)f(h(x)).$$

Preuve : on prend F une primitive de f . Par le TFI, $K(x) = F(h(x)) - F(g(x))$, et donc K est dérivable (somme de compositions de fonctions dérivables) et on obtient l'expression pour K' en appliquant la règle de la chaîne (dérivée de composition).

On sait trouver les primitives des fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{1}{x+a}$$

car $\int^x \frac{dt}{t+a} = \ln(t+a)$. Il existe aussi une formule pour trouver les primitives des fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{1}{x^2+ax+b}, \text{ et } x \mapsto \frac{x}{x^2+ax+b}$$

voir https://fr.wikipedia.org/wiki/Primitives_de_fonctions_rationnelles.

Pour intégrer des fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$$

avec p, q des polynômes, on va se ramener à des cas de la forme du slide précédent.

Par division polynômial, on peut écrire $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$ avec s un polynôme, et r un polynôme de degré strictement inférieur à q . On a alors

$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}.$$

s est un polynôme, on sait donc trouver sa primitive (somme de monômes pour lesquels on a une formule). On se concentre sur $\frac{r(x)}{q(x)}$.

L'idée est d'utiliser la factorisation des polynômes à coefficients réels en facteurs de degré 1 ou 2.

Intégration de fractions rationnelles

Notons $a_1, \dots, a_m$ les racines réelles **distinctes** de $q(x)$ et $b_1, \bar{b}_1, \dots, b_n, \bar{b}_n$ les racines non-réelles **distinctes** de $q(x)$ (comme q est à coefficients réels, les racines non-réelles viennent par paires de conjugués complexes).

Le théorème de factorisation des polynômes nous dit alors que l'on peut trouver des entiers positifs $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ et $\beta_1, \dots, \beta_n$, et un réel $C \in \mathbb{R}^*$ tels que

$$q(x) = C \prod_{i=1}^m (x - a_i)^{\alpha_i} \prod_{j=1}^n ((x - b_j)(x - \bar{b}_j))^{\beta_j}$$

$\sum_{i=1}^m \alpha_i + 2 \sum_{j=1}^n \beta_j$ est le degré de q .

De plus, les polynômes $(x - b_j)(x - \bar{b}_j)$ sont à coefficients réels : si $z = a + ib \in \mathbb{C}$,

$$(x - z)(x - \bar{z}) = (x - a - ib)(x - a + ib) = (x - a)^2 - (ib)^2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2.$$

Théorème de décomposition en éléments simples

Theorem

Soit

$$q(x) = C \prod_{i=1}^m (x - a_i)^{\alpha_i} \prod_{j=1}^n ((x - b_j)(x - \bar{b}_j))^{\beta_j}$$

avec $C, a_i, b_j, \alpha_i, \beta_j$ comme sur le slide précédent. Soit $r(x)$ un polynôme de degré strictement inférieur à celui de $q(x)$. Alors, on peut trouver des nombres réels $\gamma_{i,r}$, $\zeta_{j,l}$ et $\xi_{j,l}$ tels que

$$\frac{r(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^m \sum_{r=1}^{\alpha_i} \frac{\gamma_{i,r}}{(x - a_i)^r} + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^{\beta_j} \frac{\zeta_{j,l} + \xi_{j,l}x}{((x - b_j)(x - \bar{b}_j))^l}$$

On peut donc ramener l'intégration de $\frac{r(x)}{q(x)}$ à l'intégration de fractions de la forme

$$\frac{1}{(a+x)^n}, \quad \frac{1}{(x^2+ax+b)^n}, \quad \frac{x}{(x^2+ax+b)^n}.$$

Les intégrales de ces fonctions peuvent se calculer par récurrence en utilisant des intégrations par parties, voir https://fr.wikipedia.org/wiki/Primitives_de_fonctions_rationnelles pour les formules.

Exemple

On veut calculer

$$\int_0^1 \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 6}{x^2 + 4x + 3} dx.$$

On remarque que le degré du numérateur est plus grand ou égal au degré du dénominateur $\rightarrow$ division euclidienne ! Au tableau.

On trouve :

$$x^3 - 2x^2 - 4x + 6 = (x^2 + 4x + 3)(x - 6) + 17x + 24$$

D'où

$$\int_0^1 \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 6}{x^2 + 4x + 3} dx = \int_0^1 (x - 6) dx + \int_0^1 \frac{17x + 24}{x^2 + 4x + 3} dx.$$

Exemple

La première intégrale se fait directement :

$$\int_0^1 (x-6)dx = \int_0^1 xdx - \int_0^1 6dx = [x^2/2]_0^1 - 6 = \frac{1}{2} - 6 = -5.5.$$

Pour la seconde, on factorise le dénominateur : les racines de $x^2 + 4x + 3$ sont -1 et -3 (au tableau), donc

$$x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x+3).$$

On va décomposer en éléments simples : on cherche $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{17x+24}{x^2+4x+3} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+3}.$$

Exemple

On met au même dénominateur :

$$\frac{17x + 24}{(x + 1)(x + 3)} = \frac{(a + b)x + 3a + b}{(x + 1)(x + 3)}.$$

On veut donc que les polynômes des numérateurs soient égaux :

$$17x + 24 = (a + b)x + 3a + b,$$

ce qui donne le système $a + b = 17$ et $3a + b = 24$ et donc

$$a = \frac{7}{2}, \quad b = \frac{27}{2}.$$

Exemple

On a obtenu

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{17x + 24}{x^2 + 4x + 3} dx &= \int_0^1 \left(\frac{7}{2(x+1)} + \frac{27}{2(x+3)} \right) dx \\&= \frac{7}{2} \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx + \frac{27}{2} \int_0^1 \frac{1}{x+3} dx \\&= \frac{7}{2} \left[\ln(1+x) \right]_0^1 + \frac{27}{2} \left[\ln(3+x) \right]_0^1 \\&= \frac{7}{2} (\ln(2) - \ln(1)) + \frac{27}{2} (\ln(4) - \ln(3)) \\&= \frac{7}{2} \ln(2) + \frac{27}{2} \ln(4/3).\end{aligned}$$

Exemple

En mettant tout ensemble :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 6}{x^2 + 4x + 3} dx &= \int_0^1 (x - 6) dx + \int_0^1 \frac{17x + 24}{x^2 + 4x + 3} dx \\ &= -5.5 + \frac{7}{2} \ln(2) + \frac{27}{2} \ln(4/3).\end{aligned}$$

On peut alors demander à WolframAlpha de transformer ceci en nombre décimal si on veut :

$$-5.5 + \frac{7}{2} \ln(2) + \frac{27}{2} \ln(4/3) = 0.8097231100588511033897690 \dots$$

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-intégrable et $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ une fonction **bijjective** et dérivable avec $(\varphi^{-1})' \neq 0$. On a alors, via le changement de variable $x = \varphi^{-1}(y)$,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi^{-1}(y))(\varphi^{-1})'(y)dy.$$

On peut juste appliquer le théorème de changement de variable avec $g = \varphi^{-1}$.

ATTENTION : on a besoin de φ bijective pour que φ^{-1} soit définie comme fonction !

Exemple

On a

$$\int_1^2 \sin(x^2) dx = \int_1^4 \sin(y) \frac{1}{2\sqrt{y}} dy.$$

Quelle est la fonction φ utilisée ? Est-ce que ce changement de variable rend l'intégrale plus simple ?

Se ramener à des fractions rationnelles : substitution de Weierstrass

Si on a une fraction rationnelle de fonctions trigonométriques, par exemple

$$\int_a^b \frac{\sin^2(x) + \cos^3(x) - 8}{\sin(x) + \sin^3(x) - \cos(x) + 5} dx,$$

avec $-\pi < a < b < \pi$, on peut se ramener à des fractions rationnelles en utilisant le changement de variable

$$y = \tan(x/2), \quad dx = \frac{2}{1+y^2} dy.$$

On a alors

$$\cos(x) = \frac{1-y^2}{1+y^2}, \quad \sin(x) = \frac{2y}{1+y^2}.$$

Ce changement de variable est équivalent à $x = 2 \arctan(y)$. Par le théorème de Thalès, on a pour $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$,

$$\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\theta)}}.$$

En utilisant les formules d'addition pour $\sin$, $\cos$, on a

$$\sin(2\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta) = 2 \tan(\theta) \cos^2(\theta) = \frac{2 \tan(\theta)}{1 + \tan^2(\theta)}$$

et

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2 \cos^2(\theta) - 1 = \frac{1 - \tan^2(\theta)}{1 + \tan^2(\theta)}.$$

On obtient alors les identités voulues :

$$\cos(x) = \cos(2 \arctan(y)) = \frac{1 - y^2}{1 + y^2},$$

$$\sin(x) = \sin(2 \arctan(y)) = \frac{2y}{1 + y^2},$$

et

$$dx = 2 \arctan'(y) dy = \frac{2}{1 + y^2} dy.$$

On veut calculer

$$\int_a^b \frac{\cos(x)}{1 + \cos(x) + \sin^2(x)} dx.$$

Réduction à une fraction rationnelle au tableau.

Substitution de Weierstrass : cas hyperbolique

Dans le cas hyperbolique ($\sinh, \cosh$ à la place de $\sin, \cos$) on peut utiliser

$$y = \tanh(x/2), \quad dx = \frac{2}{1-y^2} dy.$$

On a alors

$$\cosh(x) = \frac{1+y^2}{1-y^2}, \quad \sinh(x) = \frac{2y}{1-y^2}.$$

Intégrales impropres

On veut faire du sens d'intégrales de la forme

$$\int_0^{\infty} f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

ou de la forme

$$\int_a^b f(x)dx$$

avec $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ non-bornée (typiquement, avec $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$).

Un exemple

On veut donner du sens aux intégrales

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx \quad \text{et} \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx.$$

On peut calculer pour tout $L \geq 1$:

$$\int_1^L \frac{1}{x} dx = (\ln(L) - \ln(1)) = \ln(L), \quad \int_1^L \frac{1}{x^2} dx = \left(-\frac{1}{L} + 1 \right).$$

Dans le premier cas, on voit que les intégrales tronquées divergent vers $+\infty$ quand $L \rightarrow \infty$, mais dans le second, on voit que les intégrales tronquées convergent vers 1. On peut alors poser

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_1^L \frac{1}{x^2} dx = 1.$$

Définition

Soient $a < b$ avec $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Soit $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable sur tout intervalle fermé $I \subset (a, b)$. Si la double limite

$$\lim_{s \rightarrow a^+} \lim_{t \rightarrow b^-} \int_s^t f(x) dx$$

est bien définie (possiblement égale à $+\infty, -\infty$), on définit *l'intégrale impropre de f sur (a, b)* par

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{s \rightarrow a^+} \lim_{t \rightarrow b^-} \int_s^t f(x) dx.$$

Si la double limite est dans $\mathbb{R}$, on dit que *l'intégrale impropre existe (ou converge)*. Si la limite est $\pm\infty$, on dit que *l'intégrale impropre diverge*.

On peut remarquer que l'ordre des limites n'a pas d'importance pour l'existence et la valeur de l'intégrale : si $c \in (a, b)$, on a

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow a^+} \lim_{t \rightarrow b^-} \int_s^t f(x) dx &= \lim_{s \rightarrow a^+} \lim_{t \rightarrow b^-} \left(\int_s^c f(x) dx + \int_c^t f(x) dx \right) \\&= \lim_{s \rightarrow a^+} \left(\int_s^c f(x) dx + \lim_{t \rightarrow b^-} \int_c^t f(x) dx \right) \\&= \lim_{s \rightarrow a^+} \int_s^c f(x) dx + \lim_{t \rightarrow b^-} \int_c^t f(x) dx \\&= \lim_{t \rightarrow b^-} \left(\lim_{s \rightarrow a^+} \int_s^c f(x) dx + \int_c^t f(x) dx \right) \\&= \lim_{t \rightarrow b^-} \lim_{s \rightarrow a^+} \left(\int_s^c f(x) dx + \int_c^t f(x) dx \right) \\&= \lim_{t \rightarrow b^-} \lim_{s \rightarrow a^+} \int_s^t f(x) dx.\end{aligned}$$

Si on a une fonction $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ (avec $b = +\infty$ autorisé) telle que f est Riemann-intégrable sur $[a, c]$ pour tout $c < b$, on a alors que l'intégrale impropre est définie si la limite simple

$$\lim_{L \rightarrow b^-} \int_a^L f(x) dx$$

existe (et l'intégrale existe si la limite est un nombre réel). De la même manière, si $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, est intégrable sur $[c, b]$ pour tout $a < c < b$, on a

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{L \rightarrow a^+} \int_L^b f(x) dx$$

quand la limite est bien définie.

Exemple I

On cherche à définir les intégrales impropres pour $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$I(\alpha) = \int_1^{\infty} x^{\alpha} dx.$$

On calcule les intégrales tronquées :

$$\int_1^L x^{\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1} L^{1+\alpha} - \frac{1}{1+\alpha} & \text{si } \alpha \neq -1, \\ \ln(L) - \ln(1) = \ln(L) & \text{si } \alpha = -1. \end{cases}$$

On trouve alors que l'intégrale impropre $I(\alpha)$ converge et vaut $\frac{-1}{\alpha+1}$ quand $\alpha < -1$ et diverge vers $+\infty$ quand $\alpha \geq -1$.

Exemple II

On a que pour tout $\lambda > 0$,

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}.$$

Au tableau.

Exemple III

On a que pour $\beta > 0$,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\beta} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\beta} & \text{si } \beta < 1, \\ +\infty & \text{si } \beta \geq 1. \end{cases}$$

Au tableau.

Si $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur (a, b) et admet des limites en a, b , alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \tilde{f}(x)dx$$

où $\tilde{f}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est l'extension par continuité de f à $[a, b]$.

Comme pour les sommes infinies, on a un critère pour la convergence d'intégrales impropres via la convergence de l'intégrale de la valeur absolue.

Theorem

Soient $a < b$, $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Soit $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable sur $[c, d]$ pour tout $[c, d] \subset (a, b)$. Supposons que l'intégrale impropre

$$\int_a^b |f(x)| dx$$

converge (on dit alors que $\int_a^b f(x) dx$ converge absolument). Alors, l'intégrale impropre $\int_a^b f(x) dx$ converge aussi.

L'avantage de regarder $\int_a^b |f(x)|dx$ plutôt que $\int_a^b f(x)dx$ est que c'est l'intégrale d'une fonction positive. En particulier,

- les limites dans la définition de l'intégrale impropres sont monotones : si $a < s \leq s' < t' \leq t < b$,

$$\int_{s'}^{t'} |f(x)|dx \leq \int_s^t |f(x)|dx;$$

- l'intégrale improprie $\int_a^b |f(x)|dx$ est soit convergente, soit divergente vers $+\infty$.

a) L'intégrale impropre

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} dx$$

converge.

b) L'intégrale impropre

$$\int_1^{\infty} \cos^3(x) e^{-x} dx$$

converge.

On montre dans chaque cas que $F(L) = \int_1^L |f(x)| dx$ est bornée uniformément sur L . En particulier, l'intégrale impropre $\int_1^{\infty} |f(x)| dx$ ne diverge pas vers $+\infty$, donc elle converge.

On peut généraliser le principe des deux exemples précédent.

Theorem

Soit $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ($a < b, a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$) une fonction Riemann-intégrable sur tout intervalle fermé $I \subset (a, b)$.

Supposons qu'il existe $g : (a, b) \rightarrow [0, +\infty)$ telle que

- 1) $|f(x)| \leq g(x)$ pour tout $x \in (a, b)$;*
- 2) l'intégrale impropre $\int_a^b g(x)dx$ converge.*

Alors, l'intégrale impropre $\int_a^b f(x)dx$ converge.

On va utiliser le critère de convergence absolue et montrer que $\int_a^b |f(x)|dx$ converge. Soit $c \in (a, b)$. Montrer que $\int_a^b |f(x)|dx$ converge est équivalent à montrer que les deux limites suivantes existent :

$$\lim_{t \rightarrow b^-} \int_c^t |f(x)|dx, \quad \lim_{s \rightarrow a^+} \int_s^c |f(x)|dx.$$

On montre la première, la deuxième se fait de la même façon. On pose $F : [c, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(t) = \int_c^t |f(x)|dx$. On veut alors étudier la limite de F en b . On note que F est une fonction croissante : pour $t' \geq t \geq c$,

$$F(t') - F(t) = \int_t^{t'} |f(x)|dx \geq 0$$

car $t' \geq t$ et $|f(x)| \geq 0$.

En particulier, soit $\lim_{t \rightarrow b^-} F(t) = +\infty$, soit $\lim_{t \rightarrow b^-} F(t)$ existe.

On montre que le premier cas ne peut pas arriver. Notons $C = \int_a^b g(x)dx$ qui existe par hypothèse. On a pour tout $a < s < c < t < b$, (comme $|f(x)| \leq g(x)$)

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_c^t |f(x)|dx \leq \int_c^t g(x)dx \leq \int_s^t g(x)dx \\ &\leq \lim_{s \rightarrow a^+} \lim_{t \rightarrow b^-} \int_s^t g(x)dx = C. \end{aligned}$$

En particulier, F est une fonction bornée et donc $\lim_{t \rightarrow b^-} F(t) \leq C < +\infty$. On a donc montré que $\lim_{t \rightarrow b^-} F(t)$ existe car le seul autre cas possible n'arrive pas.

On peut utiliser les intégrales impropres pour contrôler des séries et réciproquement.

Theorem

*Soit $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ une fonction **positive et décroissante**. On définit la suite*

$$a_n = f(n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Alors, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge si et seulement si $\int_0^{\infty} f(x)dx$ converge.

Notons que comme f est monotone, elle est intégrable sur tout sous-intervalle fermé et borné de $[0, +\infty)$.

On remarque que comme f est positive, soit $\int_0^\infty f(x)dx$ converge, soit $\int_0^\infty f(x)dx$ diverge vers $+\infty$. Pareil pour $\sum_{n=0}^\infty a_n$.

On va encadrer les sommes partielles

$$A_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad n \geq 0,$$

en utilisant des intégrales tronquées.

Preuve : suite minorante des A_n

On commence par remarquer que comme l'intervalle $[n, n+1]$ est de longueur 1, pour tout $n \geq 0$ on a

$$a_n = f(n) = \int_n^{n+1} f(n)dx \geq \int_n^{n+1} f(x)dx$$

car f est décroissante donc $f(x) \leq f(n)$ pour tout $x \geq n$.

On a alors que pour tout $n \geq 0$,

$$A_n = \sum_{k=0}^n f(k) \geq \sum_{k=0}^n \int_k^{k+1} f(x)dx = \int_0^{n+1} f(x)dx.$$

Si l'intégrale impropre diverge vers $+\infty$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n+1} f(x)dx = +\infty$. Donc, par théorème des gendarmes, A_n diverge vers $+\infty$.

Preuve : suite majorante des A_n

Dans l'autre direction, comme $[n-1, n]$ est de longueur 1, on a que pour tout $n \geq 1$

$$a_n = f(n) = \int_{n-1}^n f(n)dx \leq \int_{n-1}^n f(x)dx$$

car f est décroissante.

On a alors que pour tout $n \geq 0$,

$$A_n = f(0) + \sum_{k=1}^n f(k) \leq f(0) + \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k f(x)dx = f(0) + \int_0^n f(x)dx.$$

Si l'intégrale impropre converge, on note L sa valeur, on a que pour tout $n \geq 0$, comme f est positive,

$$A_n \leq f(0) + \int_0^n f(x)dx \leq f(0) + L,$$

et donc A_n est une suite bornée et croissante, donc elle converge.

Exemple : sommes de puissances

Soit $\alpha \leq 0$. On a que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$$

converge si et seulement si $\alpha > 1$. En effet : soit $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ définie par

$$f(x) = (1+x)^{-\alpha}.$$

Alors,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n).$$

De plus, f est positive et décroissante. La convergence de la série est donc équivalente à la convergence de $\int_0^{\infty} f(x)dx$.

Exemple : sommes de puissances

On vérifie alors la convergence de $\int_0^\infty f(x)dx$. On calcule les intégrales tronquées :

$$\int_0^L (1+x)^{-\alpha} dx = \int_1^L x^{-\alpha} dx = \begin{cases} 1 - (1-\alpha)L^{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \ln(L) & \text{si } \alpha = 1, \end{cases}$$

où on a utilisé le changement de variable $y = x + 1$, $dy = dx$. On a déjà étudié l'intégrale impropre $\int_1^\infty x^{-\alpha} dx$ et on a vu qu'elle convergeait si et seulement si $\alpha > 1$. Donc, $\sum_{n=1}^\infty n^{-\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Approximation intégrale : un exemple

Pour des séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ qui divergent vers $+\infty$, on peut se demander à quelle vitesse les sommes partielles divergent : comment se comporte

$$A_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

quand n devient grand.

On va voir un exemple qui donnera une version faible de *l'approximation de Stirling*.

Approximation intégrale : un exemple

L'approximation de Stirling nous dit comment se comporte $n!$ en termes de fonctions plus simples ($\exp$, $\ln$ et puissances). On va dériver sa version "faible" : pour $n \geq 1$,

$$n! = \exp(n \ln(n) - n + R(n))$$

avec

$$1 \leq R(n) \leq \ln(n) + 2.$$

En d'autres mots, $n!$ se comporte comme une puissance de n multipliée par $n^n e^{-n}$.

Approximation intégrale : un exemple

$n! = \prod_k = 1^n k$, on sait étudier des sommes donc on réduit le problème à une étude de somme en prenant le logarithme :

$$n! = \exp(\ln(n!)) = \exp\left(\sum_{k=1}^n \ln(k)\right).$$

On veut donc étudier $\sum_{k=1}^n \ln(k)$. On remarque que comme $\ln$ est croissante (comme dans la preuve du théorème de comparaison somme-intégrale),

$$\sum_{k=1}^n \ln(k) = \sum_{k=2}^n \ln(k) \geq \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \ln(x) dx = \int_1^n \ln(x) dx,$$

et

$$\sum_{k=1}^n \ln(k) \leq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \ln(x) dx = \int_1^{n+1} \ln(x) dx.$$

Approximation intégrale : un exemple

Comme $\int^x \ln(t)dt = x \ln(x) - x$, on a

$$\int_1^L \ln(x)dx = L \ln(L) - L + 1,$$

et donc

$$\begin{aligned} n \ln(n) - n + 1 &\leq \sum_{k=1}^n \ln(k) \leq (n+1) \ln(n+1) - n \\ &\leq n \ln(n) + \ln(n) + 2 - n \end{aligned}$$

car $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln(1+n^{-1}) \leq \ln(n) + n^{-1}$ et $n \geq 1$.

Comme $\exp$ est croissante, on en déduit l'approximation voulue.