Intermezzo : Séries de Taylor, fonctions analytiques

Question

On a vu que si $f \in C^\infty(I)$, on pouvait approximer f en $x_0 \in I$ à l'aide de son polynôme de Taylor d'ordre n :

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}_{=:T_n(x;f,x_0)} + o((x - x_0)^n).$$

En particulier, la connaissance de $f^{(k)}(x_0)$ pour des k de plus en plus grand nous donne une approximation de plus en plus fine de f.

Est-ce que connaitre $f^{(k)}(x_0)$ *pour tout* $k \geq 0$ suffit pour reconstruire la fonction f ?

Série de Taylor

On va collecter touts les dérivées de f en x_0 dans une série infinie :

$$T_\infty(x; f, x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

On appelle cette série *série de Taylor pour f en x_0*. La question devient : est-ce que $f(x) = T_\infty(x; f, x_0)$?

On doit évidement avoir (au moins) que la série converge pour des x proches de x_0, sinon la série infinie ne fait pas de sens.

Exemple : les série pour sinus, cosinus et exponentielle

Si on prend $x_0 = 0$, les séries de Taylor pour sin, cos et exp sont données par (dans l'ordre)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

On retrouve les séries qui définissent ces fonctions. De plus, ces séries convergent (absolument) pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exemple : série du logarithme

On regarde la série de $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+x)$ en $x_0 = 0$.

On commence par calculer les dérivées de $\ln(1+x)$: comme dérivée de fonctions composées

$$\big(\ln(1+x)\big)' = \ln'(1+x)(1+x)' = \frac{1}{1+x}.$$

Maintenant, pour $n \geq 0$,

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(-1)^n(1+x)^{n+1}}$$

Par récurrence : $n = 0$ est direct. Montrons le pas de récurrence :

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n+1)} = \left(\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)}\right)' \overset{\text{h.r.}}{=} \left(\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}\right)' = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(1+x)^{n+2}}$$

car $\left(\frac{1}{x^k}\right)' = \frac{-k}{x^{k+1}}$ (dérivée de fonction composée : $x \mapsto 1/x$ composée avec $x \mapsto x^k$).

Exemple : série du logarithme

On obtient (pour $n \geq 1$)

$$\begin{aligned}\big(\ln(1+x)\big)^{(n)} &= \Big(\big(\ln(1+x)\big)'\Big)^{(n-1)} \\ &= \Big(\frac{1}{1+x}\Big)^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}.\end{aligned}$$

La série de Taylor de $\ln(1+x)$ en $x_0 = 0$ est donc

$$\ln(1+x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x_0)^n}(x-x_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

Cette série converge absolument pour $|x| < 1$ et diverge pour $|x| > 1$. Pour $|x| = 1$, on remarque qu'elle converge (série alternée) pour $x = 1$ mais diverge pour $x = -1$. Il se trouve que la série est égale à la fonction pour $|x| < 1$.

Exemple : série de $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$

On regarde la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Si on calcule ses dérivées, on trouve pour $x \neq 0$

$$f^{(1)}(x) = \frac{2f(x)}{x^3}, \quad f^{(2)}(x) = \frac{-6f(x)}{x^4} + \frac{4}{x^6}f(x) = \frac{f(x)}{x^6}(-6x^2+4),$$

$$\dots$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{f(x)}{x^{3n}}p_n(x)$$

avec $p_n(x)$ un polynôme (on peut le montrer par récurrence avec $p_{n+1}(x) = x^3p_n'(x) + 2p_n(x) - 3nx^2p_n(x)$).

Exemple : série de $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$

En particulier,

$$\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{3n}} p_n(x) = 0,$$

car pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{|x|^k} = \lim_{y\to +\infty} y^k e^{-y^2} = 0.$$

On obtient que la fonction f est dans $C^\infty(\mathbb{R})$ et que sa dérivée en 0 est 0.

Exemple : série de $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$

La série de Taylor de f est donc... 0 !

$$T_\infty(x; f, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0}{n!} x^n = 0.$$

On peut répondre à la question initiale : en général, connaitre les dérivées de f en x_0 et avoir la sommabilité de la série de Taylor ne suffisent pas à reconstruire f !

Fonctions analytiques

On appelle *fonctions analytiques* en $b \in \mathbb{R}$ les fonctions de la forme $f : (b-r, b+r) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-b)^n$$

avec $a_0, a_1, \dots \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, telles que la série converge pour $x \in (b-r, b+r)$. Pour ces fonctions, la série de Taylor en b reconstruit la fonction, et $f^{(n)}(b) = n! a_n$.

On en a déjà rencontré : $\exp, \sin, \cos, \sinh, \cosh$.

Pour la culture : le “ratage” des séries de Taylor vu dans le plan complexe

On peut se demander d'où vient l'échec subit en remplaçant e^{-1/x^2} par sa série de Taylor en 0. La réponse se trouve en regardant cette fonction comme une fonction complexe. On a alors qu'elle n'est pas “dérivable dans la direction pure imaginaire en 0” :

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{f(\mathrm{i}\epsilon) - f(0)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{\epsilon}(e^{-1/(\mathrm{i}\epsilon)^2} - 0) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{\epsilon} e^{1/\epsilon^2} = +\infty,$$

et

$$\lim_{\epsilon \to 0^-} \frac{f(\mathrm{i}\epsilon) - f(0)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0^-} \frac{1}{\epsilon}(e^{-1/(\mathrm{i}\epsilon)^2} - 0) = \lim_{\epsilon \to 0^-} \frac{1}{\epsilon} e^{1/\epsilon^2} = -\infty.$$