

Ens: Olivier Mila  
Analyse I - XXX  
Novembre 2024  
1 h

XXX-1

SCIPER: **FAKE-1**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 4 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  - +3 points si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  - +1 point si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant-e se réserve le droit de l'annuler.

| Respectez les consignes suivantes   Read these guidelines   Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                     |                                                                                                                                                                             |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| choisir une réponse   select an answer<br>Antwort auswählen                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | ne PAS choisir une réponse   NOT select an answer<br>NICHT Antwort auswählen        | Corriger une réponse   Correct an answer<br>Antwort korrigieren                                                                                                             |
|                                                                                                                                                                                                                                                                 |  |   |
| ce qu'il ne faut <b>PAS</b> faire   what should <b>NOT</b> be done   was man <b>NICHT</b> tun sollte                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                     |                                                                                                                                                                             |
|       |                                                                                     |                                                                                                                                                                             |

## Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

**Question 1 :** Soit, pour  $a_0 \in \mathbb{R}$ , la suite  $(a_n)_{n \geq 0}$  définie pour  $n \geq 1$  par  $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2}$ .

☐ Si  $a_0 > 1$ , la suite est croissante.

☒ Si  $a_0 = 0$ , la suite est convergente.

☐ Si  $a_0 < 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ .

☐ Si  $a_0 < 1$ , la suite est décroissante.

**Question 2 :** Soit  $(a_n)_{n \geq 1}$  la suite définie par

$$a_n = (-1)^{n+1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{3}{n}.$$

Alors :

☐  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$  et  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{2}$

☐  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{4}$  et  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{7}{2}$

☒  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$  et  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

☐  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\frac{1}{4}$  et  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{2}$

**Question 3 :** Une des solutions de l'équation  $z^5 = (1 + \sqrt{3}i)^2$  est

☒  $z = \sqrt[5]{4} \left( \cos\left(\frac{2\pi}{15}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{15}\right) \right)$

☐  $z = \sqrt[5]{2} \left( \cos\left(\frac{2\pi}{15}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{15}\right) \right)$

☐  $z = \sqrt[5]{2} \left( \cos\left(\frac{16\pi}{15}\right) + i \sin\left(\frac{16\pi}{15}\right) \right)$

☐  $z = \sqrt[5]{4} \left( \cos\left(\frac{16\pi}{15}\right) + i \sin\left(\frac{16\pi}{15}\right) \right)$

**Question 4 :** Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et, pour  $n \geq 1$ ,  $u_n = -\frac{2}{3}u_{n-1} + 2$ . Alors :

☐  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$

☐  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 2$

☐  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$

☒  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{6}{5}$

**Question 5 :** Soit, pour  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_k = (-1)^k \frac{k+2}{k^3}$  et soit  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ . Alors :

☐  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = -\infty$

☒ la série  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  converge absolument

☐  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$

☐ la série  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  converge, mais ne converge pas absolument

**Question 6 :** Soit  $(a_n)_{n \geq 1}$  la suite définie par  $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ , et soit  $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ . Alors :

☒  $\inf A = -1$  et  $\sup A = \frac{3}{2}$

☐  $\inf A = -1$  et  $\sup A = 1$

☐  $\inf A = 0$  et  $\sup A = 1$

☐  $\inf A = 0$  et  $\sup A = \frac{3}{2}$

## CORRECTION

**Question 7 :** Soit la série avec paramètre  $x \in ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$  définie par

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log(x))^n}.$$

Alors la série converge si et seulement si

☐  $x \in ]0, \frac{1}{e}[$

☐  $x \in ]\frac{1}{e}, 1[ \cup ]1, e[$

☒  $x \in ]0, \frac{1}{e}[ \cup ]e, +\infty[$

☐  $x \in ]e, +\infty[$

**Question 8 :** Soit  $(a_n)_{n \geq 1}$  la suite définie par  $a_n = \frac{(5n+1)^n}{n^n 5^n}$ . Alors :

☒  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{\frac{1}{5}}$

☐  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

☐  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$

☐  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 5$

## Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

**Question 9 :** Soient  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  tels que  $\operatorname{Re}(z_1 \cdot z_2) = 0$ . Alors  $\operatorname{Re}(z_1) \cdot \operatorname{Re}(z_2) = 0$ .

☐ VRAI      ☒ FAUX

**Question 10 :** Soient  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles bornés non-vides de  $\mathbb{R}$ . Si  $\inf A > \sup B$ , alors  $A \cap B$  est vide.

☒ VRAI      ☐ FAUX

**Question 11 :** Soit  $(a_n)_{n \geq 0}$  une suite de nombres réels non-nuls telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ . Alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ .

☒ VRAI      ☐ FAUX

**Question 12 :** Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction telle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  et soit  $(a_n)_{n \geq 0}$  la suite définie par  $a_0 = 1$  et, pour  $n \geq 1$ ,  $a_n = f(a_{n-1})$ . Alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ .

☐ VRAI      ☒ FAUX

**Question 13 :** Soit  $(a_n)_{n \geq 1}$  une suite de nombres strictement négatifs. Alors, la série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge absolument si et seulement si elle converge.

☒ VRAI      ☐ FAUX