

Question 29:

(a) On a

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} n^{-2x} dx &= \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_1^c e^{-2 \log(n)x} dx \\
&= \lim_{c \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{-2 \log(n)x}}{-2 \log(n)} \right]_1^c \\
&= \lim_{c \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2 \log(n)c}}{-2 \log(n)} - \frac{e^{-2 \log(n)}}{-2 \log(n)} \\
&= 0 + \frac{n^{-2}}{2 \log(n)} \\
&= \frac{1}{n^2 \log(n^2)}.
\end{aligned}$$

(b) On a $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n^2}$. Comme $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, la série $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ converge par comparaison.

Question 30:(a) Pour $k = 1$, on a (initialisation):

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x = (1-1)e^x + xe^x.$$

Pour $k \rightarrow k+1$, on a (pas de récurrence):

$$\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x) &= (f^{(k)}(x))' \\
&\stackrel{(*)}{=} ((k-1)e^x + xe^x)' = (k-1)e^x + e^x + xe^x \\
&= ke^x + xe^x = (k+1-1)e^x + xe^x.
\end{aligned}$$

(b) Par définition, la série de Taylor de f en $a = 1$ est

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(1) (x-1)^k.$$

Comme $f^{(0)}(1) = e - e = 0$ et $f^{(k)}(1) = (k-1)e + e = ke$ pour tout $k \geq 1$, la série de Taylor de f en $a = 1$ est donc

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (ke) (x-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e}{(k-1)!} (x-1)^k.$$

(c) Par un résultat du cours, le rayon de convergence vaut

$$\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e}{(k-1)!} \frac{k!}{e} = \lim_{k \rightarrow \infty} k = +\infty.$$