

Relation entre fonction et dérivées

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle, avec $I =$ intervalle. On suppose $x_1, x_2 \in I$.

Concept	Définition	Condition sur f'	Condition sur f''
f est croissante sur I	$\forall x_1 < x_2, f(x_1) \leq f(x_2)$	$\forall x f'(x) \geq 0$	
f est décroissante sur I	$\forall x_1 < x_2, f(x_1) \geq f(x_2)$	$\forall x f'(x) \leq 0$	
f est convexe sur I	$\forall x_1 < x_2 \forall \lambda \in [0, 1]$ $f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$	f' est croissante sur I	$\forall x f''(x) \geq 0$
f est concave sur I	$\forall x < x_2 \forall \lambda \in [0, 1]$ $f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) \geq (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$	f' est décroissante sur I	$\forall x f''(x) \leq 0$

Remarque : Une condition suffisante pour que f soit strictement croissante (resp. strictement décroissante) est : $\forall x$ il existe un entier impair $n \geq 1$, tel que $f^{(k)}(x) = 0$ pour tout $1 \leq k < n$ et $f^{(n)}(x) > 0$ (resp. $f^{(n)}(x) < 0$).

Concept ($x_0 \in I$)	Définition	Condition <i>nécessaire</i> sur les dérivées	Condition <i>suffisante</i> sur les dérivées
f a un maximum local en x_0	$\exists \delta > 0$ tel que $ x - x_0 \leq \delta \Rightarrow f(x_0) \geq f(x)$	$f'(x_0) = 0$ ou n'existe pas	$f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) < 0$
f a un minimum local en x_0	$\exists \delta > 0$ tel que $ x - x_0 \leq \delta \Rightarrow f(x_0) \leq f(x)$	$f'(x_0) = 0$ ou n'existe pas	$f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) > 0$
f a un extremum local en x_0	f a un minimum local ou un maximum local en x_0		
f a un point stationnaire en x_0	$f'(x_0) = 0$		
f a un point d'inflexion en x_0	$f'(x_0)$ existe et f change de concavité en x_0	$f''(x_0) = 0$ ou n'existe pas	$f''(x_0) = 0$ et $f^{(3)}(x_0) \neq 0$

Remarque : La condition suffisante pour un maximum local (resp. un minimum local) peut être remplacée par la condition plus générale : il existe un entier pair $n \geq 2$, tel que $f^{(k)}(x_0) = 0$ pour tout $1 \leq k < n$ et $f^{(n)}(x_0) > 0$ (resp. $f^{(n)}(x_0) < 0$).

La condition suffisante pour un point d'inflexion peut être remplacée par la condition plus générale : il existe un entier impair $n \geq 3$, tel que $f^{(k)}(x_0) = 0$ pour tout $2 \leq k < n$ et $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.