Analyse I — Série 8

EPFL – Sections SIE/GC/SC — 6.11.2024

Exercice 1.
Écrire mathématiquement (avec $\varepsilon, \delta, \dots$) les phrases suivantes.

(a) $f(x)$ est arbitrairement proche de ℓ pourvu que x soit assez proche de 17.

(b) $f(x) \neq 0$ pour x assez proche de x_0.

(c) $f(x) \leq x^2$ pour x assez grand.

(d) $|f(x)|$ est arbitrairement grand pourvu que x soit différent de -4 et assez proche de -4.

Exercice 2.
Calculer les limites suivantes: [1]

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2-2}{x-1}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)-1}{\sin(x^2)}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}\right)$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sin(x)$

(f) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \sin(a+h)$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\cos(x)-\cos(a)}{x-a}$

(h) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{1-1/h^2}{1+1/h^2}$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^4}\right)$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{1}{3}} \arccos(9x^2)$.

Exercice 3.
Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to u} f(x) = \ell$ si et seulement si $\displaystyle\lim_{x\uparrow u} f(x) = \ell$ et $\displaystyle\lim_{x\downarrow u} f(x) = \ell$.

Exercice 4.
Calculer les limites suivantes (si elles existent):

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x^2-4}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{|x-3|}{x-3}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{5x-6-x^2}{4-x^2}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{5x-6-x^2}{4-x^2}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to \alpha} \frac{\tan^2(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2}$

Exercice 5.
Les fonctions suivantes sont-elles continues en $x=0$?

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(2x)}{2x} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Exercice 6.
Montrer que les fonctions trigonométriques $\sin(x), \cos(x), \tan(x)$ et les réciproques $\arcsin(x), \arccos(x), \arctan(x)$ sont continues en tout point de leur domaine.

1. On pourra utiliser les formules suivantes: Pour $a, b \in \mathbb{R}$, $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$ et $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.