

Exercice 1.

Vrai ou faux ?

- (a) Si $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
- (b) Si on a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.
- (c) Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolument, alors $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge.
- (d) Si $(a_n)_{n \geq 0}$ est strictement décroissante, alors $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge.
- (e) Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ converge.
- (f) Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolument, alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ converge.
- (g) Si on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.
- (h) Si $a_k = 5^k$ pour $k = 1, \dots, 1000$, et $a_k = \frac{1}{\sqrt{k^3}}$ si $k > 1000$, alors $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge.
- (i) Si $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ et $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ convergent, alors $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)$ converge et on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

Exercice 2.

Pour les séries à paramètre x ci-dessous, déterminer: 1) si ce sont des séries entières, et si oui, calculer leur rayon de convergence, et 2) leur domaine de convergence.

- | | | |
|--|--|---|
| (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{2^n}$ | (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$ | (f) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \right)^n$ |
| (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ | (e) $\sum_{n=0}^{\infty} (x-a)^n$
($a \in \mathbb{R}$). | (g) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^{2k} k^2} (x-1)^k$ |
| (c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ | | (h) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$ |

Exercice 3.

Donner le domaine de définition et étudier la parité et la périodicité des fonctions f suivantes, en donnant la période fondamentale le cas échéant.

- | | |
|--|--|
| (a) $f(x) = \frac{x^4 \cos(3x)}{1 + \sin(x)^2}$ | (c) $f(x) = (x - \lfloor x \rfloor)^2$ |
| (b) $f(x) = 2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \cos\left(\frac{1}{3}x\right)$ | (d) $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{1 - \sqrt{x^2 - 3}}$ |

Exercice 4.

Donner un exemple d'une fonction réelle f telle que:

- (a) $D(f) = \mathbb{R}$, f est décroissante et son image est $]0, \infty[$.
- (b) f est paire, définie sur $\mathbb{R}$, et son image est $[0, 1]$.
- (c) $(f \circ g)(x) = (x - 3)(x + 3)$ où $g(x) = x^2 - 10$.
- (d) $D(f) = [-1, 1]$, f est impaire, et ne possède pas de fonction réciproque.

Exercice 5.

Déterminer (s'ils existent) $\sup_{x \in A} f(x)$, $\inf_{x \in A} f(x)$, $\max_{x \in A} f(x)$, et $\min_{x \in A} f(x)$ pour:

- (a) $f(x) = x$, $A = \mathbb{R}$.
- (b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $A =]0, +\infty[$.
- (c) $f(x) = x^2$, $A = [1, 4]$.
- (d) $f(x) = \sin(x)$, $A =]-\frac{\pi}{2}, \pi[$.
- (e) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$, $A =]-1, 1[$.
- (f) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$, $A = \mathbb{R}$.

Exercice 6.

Calculer les composées $f \circ g$ et $g \circ f$ des fonctions réelles suivantes:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x \geq 0 \\ x & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 1 \\ x + 2 & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

Exercice 7.

Soit $f(x)$ la fonction réelle dont le graphe est représenté ci-dessous. Tracer les graphes des fonctions suivantes sur la même figure: $f_1(x) = f(-x)$, $f_2(x) = f(x - 3)$, $f_3(x) = \frac{1}{2}f(2x)$, $f_4(x) = 2f(\frac{1}{2}x)$, $f_5(x) = -\frac{1}{2}f(\frac{1}{2}x + 1) - 2$.

