Analyse I — Série 5

EPFL – Sections SIE/GC/SC — 9.10.2024

Exercice 1.
Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ non-vide et borné. Montrer que $x = \sup A$ (resp. $x = \inf A$) si et seulement si x est un majorant (resp. minorant) de A et s'il existe une suite $(a_n) \subseteq A$ telle que $a_n \longrightarrow x$. Utiliser ce résultat pour refaire l'exercice 3(d)→(i) de la série 2.

Exercice 2.
Soit (a_n) une suite. En utilisant la définition de convergence avec ε, montrer que si $a_n \geq 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \geq 0$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

Exercice 3.
Calculer les limites lorsque $n \to \infty$ des suites suivantes, si elles existent.

(a) $\dfrac{\sqrt{n^2+2}}{2n}$

(b) $\dfrac{n^2}{2^n}$

(c) $\dfrac{n!}{n^n}$

(d) $\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+3}$

(e) $\sqrt{n^2-1} - (n-1)$

(f) $n\left(\sqrt{n^4+6n-3} - n^2\right)$

(g) $n^2 3^n 2^{-3n}$

(h) $\dfrac{(3n+8)\cos(6n^2+n+1)}{n^2+2n+6}$

(i) $\dfrac{\sin(\sqrt{n^2+2})}{2n+1}$

(j) $\sqrt[n]{n}$

Exercice 4.
En utilisant le fait que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$, calculer les limites suivantes:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$ (c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n$

Exercice 5.
Calculer $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ et $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ dans les cas suivants:

(a) $a_n = (-3)^{-n} - \left(\frac{1}{-2}\right)^n$.

(b) $a_n = \mathrm{Re}(e^{i2\pi n/3})$

(c) $a_n = \left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)^n$.

(d) $a_n = \dfrac{\cos(\pi n)}{\frac{1}{2}+\cos(\frac{\pi n}{2})}$

(e) $a_n = \sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor$
(où $\lfloor x\rfloor$ = le plus grand entier $\leq x$)

Exercice 6.
Vrai ou faux ?

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

(b) Si $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, alors (a_n) diverge.

(c) Si $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, alors (a_n) converge.

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - a| = 0$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

(e) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, alors a_n est croissante.

(f) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ et $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$, alors $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

(g) Si $(a_n b_n)$ converge et $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, alors (a_n) converge.

(h) Si $(a_n b_n)$ converge et $\lim_{n\to\infty} b_n = \ell \neq 0$, alors (a_n) converge.

(i) Si $\limsup_{n\to\infty} |a_n| = 0$, alors $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(j) Si $\liminf_{n\to\infty} |a_n| = 0$, alors $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Exercice 7.
Étudier la convergence des suites définies par récurrence suivantes, et calculer leur limite si elles existent.

(a) $a_0 = 2, a_{n+1} = \dfrac{a_n + 3}{4}$

(b) $a_0 = 1, a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(2 - 3a_n)$

(c) $a_0 = 1, a_{n+1} = \dfrac{7}{3} - \dfrac{1}{1 + a_n}$

(d) $a_0 = \frac{5}{2}, a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + 6}{5}$