

Exercice 1.

Démontrer les assertions suivantes par récurrence.

- (a) Si $a_0 = c$ et $a_{n+1} = a_n + b$, alors $a_n = bn + c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (b) Si $a_1 = 1$ et $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1}$, alors $a_n = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- (c) $(x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) = x^n - 1$ pour tout $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2.

On rappelle que la *factorielle* de $n \in \mathbb{N}$ est $n! = n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1$, et que $0! = 1$ par convention. Pour $k, n \in \mathbb{Z}$, on définit le *coefficient binomial* comme

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{si } 0 \leq k \leq n, \quad \text{et} \quad \binom{n}{k} = 0 \quad \text{sinon.}$$

Montrer que:

- (a) $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$. (b) $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ pour $x, y \in \mathbb{C}$.
- (Formule du *Binôme de Newton*.)

Exercice 3.

Démontrer les formules suivantes:

- (a) $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ (b) $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (c) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$
- (d) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ (e) $\sum_{k=0}^n \binom{n-k}{k} = f_{n+1}$ où (f_n) est la *suite de Fibonacci*.

Exercice 4.

Le but de cet exercice est de montrer que la *suite de Fibonacci* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, et $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ est donnée par la formule

$$f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}, \quad \text{où } \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ et } \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

- (a) Montrer que α et β vérifient l'équation $x^2 = x + 1$.
- (b) En déduire qu'ils vérifient aussi l'équation $x^{n+2} = x^{n+1} + x^n$.
- (c) Montrer que toute suite de la forme $a_n = c \cdot \alpha^n + d \cdot \beta^n$ vérifie $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.
- (d) Conclure (en utilisant une preuve par récurrence forte).

Exercice 5.

Soit (a_n) une suite.

- (a) Montrer que $a_n \rightarrow a \Leftrightarrow |a_n - a| \rightarrow 0$.
- (b) Si $a_n \rightarrow a$, démontrer que $|a_n| \rightarrow |a|$.
- (c) Trouver un exemple où $|a_n| \rightarrow |a|$, mais où (a_n) diverge.

Exercice 6.

Soient (a_n) et (b_n) deux suites convergentes, avec $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. On suppose que $b_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $b \neq 0$. Montrer que :

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}. \quad (b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Exercice 7.

Pour les suites suivantes, déterminer si elles sont (strictement) (dé)croissantes, bornées, convergentes. Si elles convergent, calculer leur limite lorsque $n \rightarrow \infty$.

$$\begin{array}{ll} (a) \quad a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n & (f) \quad a_n = \frac{n-1}{3n^2+1} \quad (n \geq 1) \\ (b) \quad a_n = 2n^2 - \frac{1}{n} \quad (n \geq 1) & (g) \quad a_n = \frac{(n-1)^2}{3n^2+1} \quad (n \geq 1) \\ (c) \quad a_n = \frac{3n}{n+2} & (h) \quad a_n = (-1)^n \frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt[3]{n}} \quad (n \geq 1) \\ (d) \quad a_n = \frac{5n^2+3n+7}{3n^2+7} & (i) \quad a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \\ (e) \quad a_n = \frac{3n^2+1}{n-1} \quad (n \geq 2) & (j) \quad a_n = \frac{n^2}{2^n} \end{array}$$

Exercice 8.

Vrai ou faux ?

- (a) Si (a_n) est bornée, alors a_n converge.
- (b) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \sin(17n) = 0$.
- (c) Si (a_n) converge vers a , alors $|a_n - a| < 10^{30}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (d) Si $(a_n + 3b_n)$ converge, alors (a_n) et (b_n) convergent.
- (e) Si $(a_n + 3b_n)$ converge, alors au moins une des deux suites (a_n) et (b_n) converge.