

Exercice 1.

Calculer $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$, $\bar{z}$, $\arg(z)$, $\frac{1}{z}$ pour les nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ suivants:

$$z = 1 + i, \quad z = 14, \quad z = 2 - 2\sqrt{3}i, \quad z = -\pi i.$$

Exercice 2.

- (a) Soit $z = a + bi$. Si $a > 0, b \geq 0$, on a vu que $\arg(z) = \arctan(b/a)$. Trouver et démontrer une formule pour $\arg(z)$ dans les cas où (i) $a > 0, b < 0$, (ii) $a < 0, b \geq 0$, (iii) $a < 0, b < 0$ et (iv) $a = 0$.
- (b) Montrer que si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, alors $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ et $\overline{z_1/z_2} = \bar{z}_1/\bar{z}_2$.
- (c) Pour $z \in \mathbb{C}$, montrer que $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$.

Exercice 3.

Écrire les nombres complexes suivants en forme cartésienne et en forme polaire (exponentielle).

- | | | |
|-----------------------------------|--------------------------|--|
| (a) $2(1 + i)$ | (d) $(2 - 3i)(3 + 2i)$ | (g) e^{i-50} |
| (b) $3e^{i\frac{\pi}{2}}$ | (e) $\frac{2-3i}{3+2i}$ | (h) $\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1+2i}$ |
| (c) $\frac{8i^{21}-2i^{11}}{1-i}$ | (f) $(\frac{1}{i})^{19}$ | (i) $e^{i\frac{\pi}{8}} + e^{i\frac{3\pi}{8}}$ |

Exercice 4.

Résoudre les équations suivantes pour $z \in \mathbb{C}$.

- | | | |
|--------------------|-------------------------------|------------------------------|
| (a) $z^5 = -1$ | (c) $z^4 = -2i$ | (e) $z^2 + 6z + 12 - 4i = 0$ |
| (b) $z^2 = 3 - 4i$ | (d) $z^2 = (1 + \sqrt{3}i)^8$ | (f) $z^6 + 4z^3 + 2 = 0$ |

Exercice 5.

- (a) Soit $P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ un polynôme à coefficients réels (i.e. $a_i \in \mathbb{R}$), et $z_0 \in \mathbb{C}$ est une racine de P . Montrer que $\bar{z}_0$ est aussi une racine de P . Est-ce toujours vrai si les a_i ne sont pas tous réels?
- (b) Décomposer le polynôme $z^5 + 1$ en produit de facteurs irréductibles complexes, puis en produit de facteurs irréductibles réels.
- (c) Les racines du polynôme $z^4 - 6z^3 + 10z^2 + 2z - 15$ sont:
- | | |
|---|--|
| ☐ (i) $1 + i, 1 - i, 3, -1$ | ☐ (iii) $2 + i, 2 - i, 3, -1$ |
| ☐ (ii) $2 + i, 1 + i, 3, -1$ | ☐ (iv) $1 + i, 1 - i, 5, -1$ |

Exercice 6.

- (a) (Re)démontrer que $\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$.
- (b) Prouver l'égalité suivante:

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0 \text{ et } z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}\} = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0 \text{ et } \operatorname{Im}(z) = 0 \text{ ou } |z| = 1\}.$$

Exercice 7.

Vrai ou faux ?

- (a) Pour $z \in \mathbb{C}$, $e^{\arg(z)} = \arg(e^z)$.
- (b) Pour $z \in \mathbb{C}$, $e^{|z|} = |e^z|$.
- (c) Pour $z \in \mathbb{C}$, $e^{\operatorname{Re}(z)} = \operatorname{Re}(e^z)$.
- (d) Pour $z \in \mathbb{C}$, $e^{\operatorname{Re}(z)} = |e^z|$.

Exercice 8.

Montrer qu'une suite (a_n) est bornée si et seulement s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|a_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9.

Soit $a_n = ar^n$ ($n \in \mathbb{N}$) une suite géométrique avec $a > 0$. Montrer que (a_n) est

- (a) bornée si et seulement si $r \in [-1, 1]$
- (b) minorée si et seulement si $r \geq -1$
- (c) strictement croissante si et seulement si $r > 1$
- (d) strictement décroissante si et seulement si $0 < r < 1$
- (e) constante si et seulement si $r = 1$.