

Exercice 1.

Montrer que $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$ et $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$. Puis, montrer que $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.

Soit $I =]p, q]$ où $p, q \in \mathbb{R}$, et $p < q$. Montrer *soigneusement et précisément* que $\sup I = q$ et $\inf I = p$. Les quantités $\max I$ et $\min I$ existent-elles ? Si oui, les calculer.

Exercice 3.

Parmi les sous-ensembles $A \subseteq \mathbb{R}$ suivants, déterminer s'ils sont majorés, minorés ou bornés, calculer $\sup A$ et $\inf A$, ainsi que $\max A$ et $\min A$ (s'ils existent).

(a) $A =]-1, \sqrt{2}]$.

(f) $A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

(b) $A =]\sqrt{3}, \infty[$.

(g) $A = \left\{ \frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.

(c) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x - 1| \leq 1\}$.

(h) $A = \mathbb{Q}$.

(d) $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

(i) $A = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$.

(e) $A = \left\{ \frac{(-1)^{2n+1} + (-1)^{4n-2}}{(-1)^{n+3}} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.

Exercice 4.

Réécrire les ensemble suivants en utilisant la notation d'intervalles.

(a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x + 1| \leq 1\}$.

(d) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -x < 3 \text{ et } x^2 \geq 4\}$.

(b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -x \leq 1\}$.

(e) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -x^3 \geq 3\}$.

(c) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 2\}$.

(f) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x^2 - 2| < 1\}$.

Exercice 5.

(a) Montrer que $0.\bar{9} = 1$.

(b) Écrire 3.14159 et $55.\overline{612}$ sous forme de fraction $\frac{a}{b}$.

(c) Déterminer (sans calculatrice !) la représentation décimale de $\frac{8}{13}$.

Exercice 6.

Vrai ou faux ?

(a) La somme de deux nombres rationnels est rationnelle.

(b) La somme de deux nombres irrationnels est irrationnelle.

(c) La somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est irrationnelle.

(d) Si $A \subseteq \mathbb{R}$ est majoré, alors $\max A \in \mathbb{R}$ existe.

(e) Si $A \subseteq \mathbb{R}$ est majoré, alors $\sup A \in \mathbb{R}$ existe.

(f) Pour $A \subseteq \mathbb{R}$, si $\sup A = \inf A$, alors A ne contient qu'un élément.

Exercice 7.

Écrire les nombres complexes i^7 , $(2 - 3i)^2$, $\frac{1}{2 + i}$, $(1 + i)^2$, $(1 + i)^4$, et $(1 + \sqrt{3}i)^6$ sous la forme $a + bi$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.