

Exercice 1.

On considère les ensembles $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$. Déterminer

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad A \setminus B, \quad B \setminus A, \quad E \setminus A, \quad E \setminus B, \quad E \setminus (A \cup B), \quad E \setminus (A \cap B).$$

Exercice 2.

Pour $A \subseteq X$, on rappelle que le *complément de A dans X* est $A^c = X \setminus A$. Soit X un ensemble quelconque, et $A, B \subseteq X$ deux sous-ensembles de X .

- (a) Déterminer $\emptyset^c$ et X^c .
- (b) Montrer que $(A^c)^c = A$.
- (c) Montrer que $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ et $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Exercice 3.

Décrire les ensembles suivants sous la forme $X = \{\text{élément} \mid \text{condition}\}$, et sous la forme $X = \{a, b, c, \dots\}$ (liste d'éléments avec $\dots$).

- (a) L'ensemble des entiers négatifs ou nuls.
- (b) L'ensemble des entiers pairs.
- (c) L'ensemble des entiers impairs.
- (d) L'ensemble des entiers strictement positifs divisibles par 3, sans 12.

Exercice 4.

- (a) Démontrer le *Théorème de Pythagore*: Dans un triangle rectangle de côtés a, b et d'hypoténuse c , on a:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

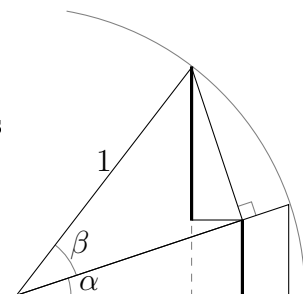
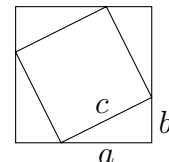
- (b) En déduire que $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- (c) Montrer que $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- (d) Démontrer la formule d'addition du sinus (dans le cas particulier où $\alpha, \beta > 0, \alpha + \beta < \pi/2$):

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta).$$

Indication: On pourra s'inspirer des figures ci-contre.



Exercice 5.

Soient X et Y deux ensembles, et $f: X \rightarrow Y$ et $g: Y \rightarrow X$ deux fonctions.

- (a) Si $g(f(x)) = x$ pour tout $x \in X$, montrer que f est injective et g est surjective.
- (b) Trouver deux ensembles X, Y et deux fonctions f, g telles que $g(f(x)) = x$ pour tout $x \in X$, mais où f n'est pas surjective et g n'est pas injective.

Exercice 6.

Trouver le domaine de définition $D = D(f) \subseteq \mathbb{R}$ et l'image $I = \text{Im}(f) \subseteq \mathbb{R}$ des fonctions suivantes. Trouver ensuite un sous-ensemble $A \subseteq D$ tel que la restriction $f: A \rightarrow I$ est bijective, et déterminer la réciproque de cette fonction restreinte.

- | | | |
|--|--------------------|-----------------------------------|
| (a) $-2x + 1.$ | (e) $1 - x^2$ | (i) $\sin(\frac{\pi}{4} \sin(x))$ |
| (b) x^n ($n \in \mathbb{N}$ impair) | (f) $x^2 - 8x + 3$ | (j) $\frac{1}{x^2+1}$ |
| (c) x^n ($n \in \mathbb{N}$ pair) | (g) $\sin(2x)$ | (k) $\sqrt{25 - x^2} - 1$ |
| (d) $\frac{1}{x}$ | (h) $2 \tan(x)$ | |

$$(l) \quad f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{4 - x^2} & \text{si } 0 < x \leq 2. \end{cases}$$

On rappelle que la *composée* de deux fonctions f, g est la fonction $g \circ f$ définie par $g \circ f(x) = g(f(x))$. De plus, une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est *croissante*¹ si $f(x) \leq f(y)$ dès que $x < y$, et *strictement croissante* si $f(x) < f(y)$ dès que $x < y$.

Exercice 7.

Vrai ou faux ?

- (a) Il n'existe qu'une seule fonction bijective $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.
- (b) Si $f: X \rightarrow Y$ et $g: Y \rightarrow Z$ sont deux fonctions injectives, leur composée $g \circ f: X \rightarrow Z$ est injective.
- (c) Si $f: X \rightarrow Y$ et $g: Y \rightarrow Z$ sont deux fonctions surjectives, leur composée $g \circ f: X \rightarrow Z$ est surjective.
- (d) Si une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est croissante, alors elle est injective.
- (e) Si une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est croissante, alors elle est surjective.
- (f) Si une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est strictement croissante, alors elle est injective.
- (g) Si une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est strictement croissante, alors elle est surjective.

1. ou croissante au sens large