

Exercice 1. (*Fonctions trigonométriques hyperboliques*)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit les **fonctions trigonométriques hyperboliques** comme les fonctions trigonométriques mais sans le i , c'est à dire:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

Montrer que :

- (a) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.
(Les points $(\cosh(t), \sinh(t))$ sont donc sur l'*hyperbole* d'équation $x^2 - y^2 = 1$)
- (b) $\sinh'(x) = \cosh(x)$ et $\cosh'(x) = \sinh(x)$.
- (c) $\sinh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est bijective, et sa réciproque est $\operatorname{arcsinh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$.
- (d) $\cosh: [0, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$ est bijective, et sa réciproque est $\operatorname{arccosh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$

Exercice 2.

Refaire l'ex 5, série 10 en utilisant la proposition suivante, vue en cours:

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[\setminus \{x_0\}$. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$ existe, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \ell$.

Exercice 3.

On considère la fonction exponentielle $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- (a) Montrer que $\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.
- (b) Montrer que pour tout polynôme $p(x)$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p(x)}{\exp(x)} = 0$.

Remarque: Cela montre que exp croît plus vite que tout polynôme.

Exercice 4.

Calculer les limites suivantes (avec BH ou développement limités).

- (a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log(x-1)}{x-2}$
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - \sin(x)}{x - \sin(x)}$
- (g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{\tan(x)}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\tanh(x) - 1)$
- (e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log(x)}$
- (h) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} x \tan(x) - \frac{\pi}{2 \cos(x)}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin(x))^{\frac{1}{x}}$
- (f) $\lim_{x \downarrow 0} x^{\pi x}$

Exercice 5.

Parmi les 32 phrases suivantes, déterminer lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses.

$$\cos(x) = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1+x \\ 1+2x^2 \\ 1-\frac{1}{2}x^2 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} x\varepsilon(x) \\ x^2\varepsilon(x) \\ x^3\varepsilon(x) \\ x^4\varepsilon(x) \end{array} \right\} \text{ pour une fonction } \varepsilon: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

telle que $\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon(x) = 0. \\ \varepsilon(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0. \end{array} \right\}$

Exercice 6.

Déterminer le développement limité d'ordre n en $a = 0$ des fonctions suivantes:

- | | |
|--|---|
| (a) $f(x) = \sin(3x), \quad n = 3$ | (g) $f(x) = \sqrt{1 + \sin(x)}, \quad n = 3$ |
| (b) $f(x) = \log(2 + x), \quad n = 3$ | (h) $f(x) = \frac{3}{(1-x)(1+2x)}, \quad n = 4$ |
| (c) $f(x) = \log(\cos(x)), \quad n = 4$ | (i) $f(x) = e^{x^2}, \quad n \text{ quelconque}$ |
| (d) $f(x) = \log(1 + x - 2x^2), \quad n = 3$ | (j) $f(x) = \frac{x}{9 + x^2}, \quad n \text{ quelconque.}$ |
| (e) $f(x) = e^{\sin(x)}, \quad n = 4$ | |
| (f) $f(x) = \sqrt{1+x}, \quad n = 3$ | |

Indication: Le (f) mis à part, on peut tout faire sans dériver (à l'aide des DL vus en cours). Pour le (h), on pourra réécrire l'expression sous la forme $\frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+2x}$.

Exercice 7.

Déterminer les extremums locaux et globaux (s'ils existent) et les points stationnaires et d'inflexion des fonctions suivantes, et donner les intervalles où elles sont croissantes/décroissantes et convexes/concaves.

- | | |
|---|--|
| (a) $f(x) = x^3 + 5x^2 + 1$ sur $[-6, 1]$. | (d) $f(x) = (x-1)^2 - 2 2-x + 1$ sur $]2, 3[$. |
| (b) $f(x) = x^3 + 5x^2 + 1$ sur $] -6, 1[$. | (e) $f(x) = \frac{x^3}{3x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$. |
| (c) $f(x) = x^2 - \left x + \frac{1}{4} \right + 1$ sur $[-1, 1]$. | (f) $f(x) = x \log(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$. |

Exercice 8.

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Vrai ou faux ?

- Si f est dérivable à gauche et à droite en $a \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a .
- Si f est dérivable sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, alors f' est continue sur le même intervalle.
- Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors $g(x) = \sqrt{f(x)^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Si f est dérivable en $a \in \mathbb{R}$, il existe $\delta > 0$ tel que f est continue sur $]a-\delta, a+\delta[$.
- Si $f(x) = x^2 - 2x$, alors $(f \circ f)'(1) = 0$.
- Si f est bijective, différentiable sur $\mathbb{R}$, et si la droite tangente au point $(-1, 2)$ du graphe de f a l'équation $y = 6x + 8$, alors $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{6}$.
- Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est donnée par $f(x) = x + e^x$, alors $(f^{-1})'(1) = 1 + \frac{1}{e}$.
- Si f est dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$, alors $f \circ f$ est aussi dérivable en x_0 .
- Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(a) = 0$, alors $(f \circ f \circ f \circ f)'(a) = 0$.