

Exercice 1.

Soient $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables en $x_0 \in D$.

- (a) Démontrer la règle du produit: $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.
 (b) En utilisant (a), démontrer la règle du quotient:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(\frac{f'g - fg'}{g^2}\right)(x_0).$$

Exercice 2.

Calculer la dérivée des fonctions f suivantes, et donner le domaine de f et f' .

- | | | |
|--|---|--|
| (a) $\tan(x)$ | (f) $(3 + 9 \tan x) \cos(2x)$ | (l) $\arccos(x)$ |
| (b) $\cot(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ | (g) $\log\left(\frac{x}{\sqrt{x+3}}\right)$ | (m) $\arctan(x)$ |
| (c) $\frac{5x+2}{3x^2-1}$ | (h) $\frac{2e^x}{x^2-1}$ | (n) $\sqrt{\sin\left(\sqrt{\sin(x)}\right)}$ |
| (d) $\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ | (i) $ x \sin(x)$ | (o) $((2x^4 + e^{-(4x+3)}))^{\frac{3}{5}}$ |
| (e) $\sin^2(x) \cdot \cos(x^2)$ | (j) $ x ^3$ | (p) $\log(4^{\sin(x)})e^{\cos(4x)}$ |
| | (k) $\arcsin(x)$ | (q) x^x |
| | | (r) x^{x^x} |

Exercice 3.

Dans les cas suivants, calculer les dérivées $f^{(n)}$ d'ordre n , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- (a) $f(x) = x^k$ (où $k \in \mathbb{Z}$).
 (b) $f(x) = \sin(2x) + 2 \cos(x)$.
 (c) $f(x) = \log(x)$.

Exercice 4. (*Dérivée logarithmique.*)

Si f est dérivable et $f(x) > 0$, montrer que $f'(x) = f(x)(\log(f(x)))'$. En déduire la dérivée de $f(x) = (x^2 + 1)^2(x^6 + 2)^3(x^4 + 3)$.

Exercice 5.

Déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ pour que la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suivante soit dérivable partout:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3 & \text{si } x \leq 1 \\ \alpha x + \beta & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Exercice 6.

Montrer que l'équation $\frac{1}{(x+2)^3} + \frac{1}{(x-4)^5} = 0$ a exactement une solution réelle.

Exercice 7. (*Exp et log dans d'autres bases*)

Pour $a > 0$, et $a \neq 1$, on définit les fonctions:

$$\exp_a(x) = \exp(\log(a) \cdot x), \quad \log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)}.$$

Montrer que:

- (a) $\exp_a: \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ est bijective, de réciproque $\log_a:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.
- (b) $\exp_a(\frac{p}{q}) = a^{\frac{p}{q}}$ pour tout $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, justifiant la définition $a^x = \exp_a(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
- (c) $(a^x)' = \log(a) \cdot a^x$, et $\log'_a(x) = \frac{1}{\log(a) \cdot x}$.
- (d) a^x est strictement croissante si $a > 1$ et strictement décroissante si $a < 1$.
- (e) $\log_a(b^x) = x \cdot \log_a(b)$.
- (f) $\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$ (*Changement de base*).

Exercice 8. (*Théorème des accroissements finis généralisé.*)

- (a) Soient $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues, et dérivables sur $]a, b[$. On suppose que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$. Montrer qu'il existe un $u \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f'(u)}{g'(u)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Indication: Appliquer le théorème de Rolle à la fonction

$$h(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)) \right).$$

- (b) Utiliser le TAF généralisé pour démontrer le TAF.