

ECOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

NOTES DE COURS 2023

Analyse I

Olivier Mila

Version provisoire du 20 décembre 2023
Toutes informations non-garanties

Polycopié de 2023

Chapitre 0: Prélude

1 Ensembles

Un **ensemble** est une collection d'objets (mathématiques). Exemples:

- 1) $A = \{1, 2, 3\}$. Ensemble contenant les nombres un, deux et trois.
- 2) $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Ensemble des **nombre**s **naturels**.
- 3) $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. Ensemble des **entiers relatifs**.
- 4) $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Ensembles des **nombre**s **rationnels**, des **nombre**s **réels**, et des **nombre**s **complexes** (revus plus tard).
- 5) **Intervalle**s (revus plus tard) Ex: $[2, 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 5\}$ = nombres réels compris entre 2 et 5 (inclus), $]2, 5[= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$.
- 6) $B = \{2, 4, 6, \dots\}$. Ensemble des nombres pairs positifs.

Notations:

- $x \in X$ signifie x **est élément de** X . Ex: $2 \in A$, $-1 \in \mathbb{Z}$, $-4 \notin B$.
- $X \subset Y$, ou $X \subseteq Y$, signifie X **est sous-ensemble de** Y . Ex: $A \subseteq \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \not\subseteq B$.
- $X \setminus Y = \{x \in X \mid x \notin Y\}$, ou $X - Y$, signifie X **privé de** Y . Ex: $A \setminus \{3, 4, 5\} = \{1, 2\}$, $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} = \{-1, -2, -3, -4, \dots\}$, $\mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}^*$.
- $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$ est le **produit cartésien** de X et Y ; c'est l'ensemble des **couples** (x, y) . Ex: Si $X = \{1, 2\}$, $Y = \{3, 4\}$, on a $X \times Y = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$. (Attention: $(x, y) \neq (y, x)$. Donc $(3, 1) \notin X \times Y$).

2 Fonctions

Une **fonction** est une manière d'assigner des éléments $y \in Y$ à des $x \in X$. Ex: $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{1, 8, 12\}$ et f assigne $2 \mapsto 1$, $3 \mapsto 8$, $4 \mapsto 8$. Le **domaine** est le sous-ensemble $D(f) \subseteq X$ des éléments auxquels un $y \in Y$ est assigné, et l'**image** est le sous-ensemble $\text{Im}(f) \subseteq Y$ des éléments assignés à au moins un $x \in X$. (Attention: Pas plus d'une flèche partant du même x .)

Notations:

- $f(x)$ = image de x via f = élément $y \in Y$ assigné à x . Donc
$$D(f) = \{x \in X \mid f(x) \text{ est défini}\}, \text{ et}$$
$$\text{Im}(f) = \{y \in Y \mid \underbrace{\exists}_{\text{il existe}} x \in X \text{ tel que } y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in D(f)\}.$$
- $f: A \rightarrow B$ veut dire $D(f) = A$ et $\text{Im}(f) \subseteq B$.
$$a \mapsto f(a)$$

- $f(x) = \dots$ (formule) $\dots$ sous-entend $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ avec $D = D(f) \subseteq \mathbb{R}$ le plus grand possible.

$$x \mapsto f(x)$$

Exemples:

- (i) $f(x) = x + 1$ veut dire $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto x + 1$$
- (ii) Si $g: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{2, 3, 4\}$ est tel que $g(1) = 2, g(2) = 3, g(3) = 4$, alors g est comme f , mais avec des ensembles de départ et d'arrivée plus petits: $g = f|_{\{1, 2, 3\}}^{\{2, 3, 4\}}$ (**restriction** de f à $\{1, 2, 3\}$ et **corestriction** de f à $\{2, 3, 4\}$).
- (iii) $f(x) = \frac{1}{x}$ veut dire $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

3 Surjectivité et Injectivité

Définition. Une fonction $f: X \rightarrow Y$ est

- **surjective** si $\text{Im}(f) = Y$ (tout $y \in Y$ a *au moins* une pré-image),
- **injective** si $f(x_1) = f(x_2) \underset{\text{implique}}{\Rightarrow} x_1 = x_2$, i.e. dès que $f(x_1) = f(x_2)$, on a forcément $x_1 = x_2$ (tout $y \in Y$ a *au plus* une pré-image),
- **bijective** si injective et surjective (tout $y \in Y$ a *exactement* une pré-image).

Si $f: X \rightarrow Y$ est bijective (et seulement dans ce cas !), on peut l'"inverser":

Définition. Si $f: X \rightarrow Y$ est bijective, sa **fonction réciproque** est

$$f^{-1}: Y \rightarrow X$$

$$y \mapsto f^{-1}(y) = \text{unique } x \in X \text{ tel que } f(x) = y.$$

Exemples:

- (i) Exemple visuel (vu en classe).
- (ii) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est bijective de réciproque $f^{-1}(x) = x - 1$ (détails vus en classe).

$$x \mapsto x + 1$$
- (iii) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Pas surjective: $-3 \notin \mathbb{R} = Y$, car un carré est toujours positif. On la corestreint à $R_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$: $g = f|_{R_{\geq 0}}^{\mathbb{R}_{\geq 0}}$. La fonction $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ est

$$x \mapsto x^2$$
surjective, mais pas injective: $g(2) = 4 = g(-2)$, alors que $2 \neq -2$. On la restreint à $\mathbb{R}_{\geq 0}$: $h = g|_{\mathbb{R}_{\geq 0}}^{\mathbb{R}_{\geq 0}}$. La fonction $h: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ est bijective, de réciproque

$$x \mapsto x^2$$

$$h^{-1}: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ (détails et graphes vus en classe).}$$

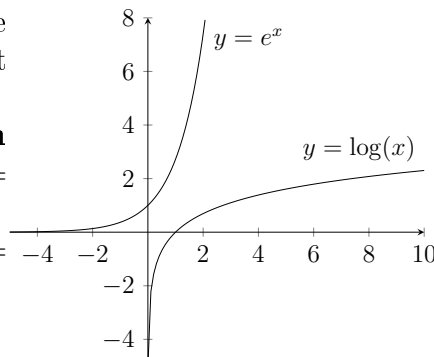
$$x \mapsto \sqrt{x}$$

4 Autres exemples de fonctions

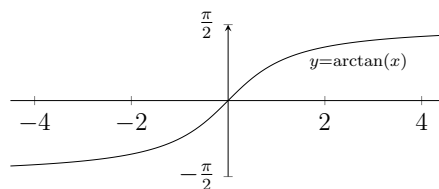
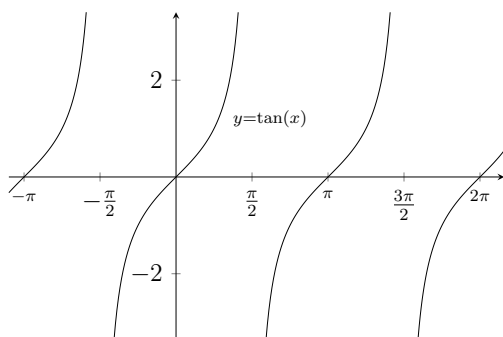
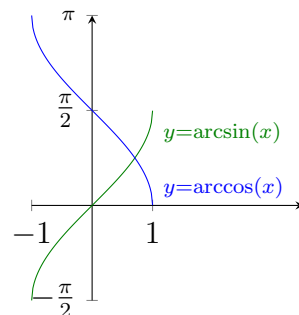
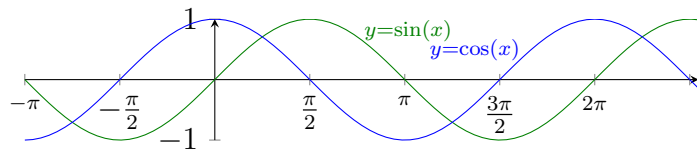
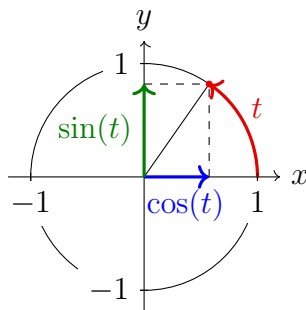
- (i) Polynômes: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$; les $a_i \in \mathbb{R}$ sont les **coefficients**, et n est le **degré** (si $a_n \neq 0$). Ex: $f(x) = x^3 + 2x - 1$, $f(x) = x^7, \dots$

Si n est *impair*, $f(x) = x^n$ est bijective, et si n est *pair*, on doit co/restreindre à $h = f|_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$. Dans les deux cas la réciproque est notée $\sqrt[n]{x}$. Si $x \geq 0$, on peut utiliser la notation $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$.

- (ii) Exponentielles: Pour chaque **base** $a > 0$, on a l'**exponentielle en base a** , notée $f = \exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si $a \neq 1$, $f|_{\mathbb{R}_{>0}}$ est bijective; sa réciproque est le **logarithme en base a** , noté $\log_a : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$. Si $a = e = 2,718\dots$ = **nombre d'Euler**, on note $\log_e(x) = \ln(x) = \log(x)$.



- (iii) Fonctions trigonométriques: le **sinus** $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et le **cosinus** $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont définis à l'aide de la fissure ci-contre. On a $\sin(0) = 0, \sin(\frac{\pi}{2}) = 1, \dots$. $D(\sin) = D(\cos) = \mathbb{R}$, et $\text{Im}(\sin) = \text{Im}(\cos) = [-1, 1]$. La co/restriction $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ est bijective, de réciproque $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. La co/restriction $\cos|_{[0, \pi]}$ est bijective, de réciproque $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$. La **tangente** est définie comme $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. On a $D(\tan) = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ et $\text{Im}(\tan) = \mathbb{R}$. La restriction $\tan|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$ est bijective, de réciproque $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Graphes:



Définition. La **composée** (ou **composition**) de deux fonctions $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ est la fonction $g \circ f: A \rightarrow C$

$$a \mapsto g \circ f(a) = g(f(a)).$$

Ex: $\sin(x^2) = g \circ f(x) = g(f(x))$ avec $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2$ $x \mapsto \sin(x)$.

On remarque que si $f: A \rightarrow B$ est bijective, alors $g: B \rightarrow A$ est sa réciproque si et seulement si $g \circ f(x) = x$ et $f \circ g(x) = x$.

Chapitre 1: Nombres

1 Entiers et nombres rationnels

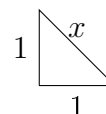
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ = nombres naturels. $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \dots\}$.
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \cup -\mathbb{N}$ = entiers relatifs.
- $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ = nombres rationnels. (Peut être identifié à $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ via " $\frac{a}{b} = (a, b)$ ", mais où l'on identifie $\frac{a}{b} = cd$ si $ad = bc$).

Malgré la quantité de nombres dans $\mathbb{Q}$, on a:

Proposition 1.1. *L'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution $x \in \mathbb{Q}$.*

Preuve. Par l'absurde. Supposons qu'il existe une solution $x = \frac{a}{b}$. On peut supposer que soit a , soit b est impair (sinon on peut simplifier la fraction). Alors $x^2 = 2 \Rightarrow (\frac{a}{b})^2 = 2 \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow a^2$ est pair. Si a était impair, on aurait $a = 2k + 1$ pour un $k \in \mathbb{Z}$, et donc $a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_{k'}) + 1$ serait aussi impair. Donc a est forcément pair $\Rightarrow a = 2c$. Il suit $a^2 = (2c)^2 = 4c^2 = 2b^2 \Rightarrow 2c^2 = b^2 \Rightarrow b^2$ est pair $\Rightarrow b$ est pair (cf même argument que pour a). Donc a et b sont tous les deux pairs: c'est absurde! (On avait supposé que l'un ou l'autre était impair). Il ne peut donc exister de solution $x \in \mathbb{Q}$. $\square$

Remarque 1.1. Cela dit, en observant le triangle ci-contre, on s'aperçoit que le côté x est tel que $x^2 = 2$! Il nous manque donc des nombres...



2 Construction des nombres réels

Idée (de génie): utiliser la relation d'ordre $x \leq y$ sur $\mathbb{Q}$ pour "ajouter" des nombres aux bons endroits.

Définition 1.1. Soit $A \subseteq \mathbb{Q}$ un ensemble non-vide ($A \neq \emptyset$).

- Un **majorant** de l'ensemble A est un $x \in \mathbb{Q}$ tel que $x \geq a$ pour tout $a \in A$.
- S'il existe un **majorant** x de A tel que $x \in A$, alors x est unique et s'appelle le **maximum** de A .
- S'il existe un **minorant** x de A tel que $x \in A$, alors x est unique et s'appelle le **minimum** de A .

- majoré**
un majorant
 • L'ensemble A est **minoré** s'il admet un minorant.
borné
les deux

Exemples:

- Si $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x \leq 1\}$, alors A admet $2, 14, \frac{3}{2}, 1$ comme majorants et $-3, -\frac{1}{2}, 0$ comme minorants. Il est donc borné, et on a $\max A = 1$ et $\min A = 0$.
- $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 1\}$ admet les mêmes majorants et minorants que A , et est donc borné. En revanche, $\max B$ et $\min B$ n'existent pas (B n'a pas de majorant/minorant dans B).
- $C = \mathbb{N}$ possède 0 comme minorant, mais pas de majorants. Il n'est donc pas majoré (et pas borné). $\max C$ n'existe pas, et $\min C = 0$.

Moralement, B devrait avoir comme "maximum" 1 et "minimum" 0. Cela motive:

Définition 1.2. Soit $A \subseteq \mathbb{Q}$ un ensemble non-vide.

- Le **suprémum** de A est $\sup A = \min(\{x \in \mathbb{Q} \mid x \text{ est un majorant de } A\})$.
- L'**infimum** de A est $\inf A = \max(\{x \in \mathbb{Q} \mid x \text{ est un minorant de } A\})$.

Si A n'est pas majoré
minoré, ou si le min
max n'existe pas, alors $\sup A$
 $\inf A$ n'existe pas (par définition).

Remarque 1.2. Avec des mots: $\sup A$ est le plus petit des majorants de A , s'il existe!

De plus, si $\max A$ existe, alors $\sup A = \max A$
 $\inf A = \min A$

Exemples (On reprend les exemples précédents):

- $\sup A = \max A = 1$, et $\inf A = \min A = 0$.
- $\sup B = 1$ même si $\max B$ n'existe pas, et $\inf B = 0$ même si $\min B$ n'existe pas.
- $\inf C = \min C = 0$ et $\sup C$ n'existe pas (il n'y a pas de majorant).

Remarque 1.3. Pour un ensemble borné, si $\min$, $\max$ peuvent ne pas exister, on s'attend à ce que $\inf$ et $\sup$ existent toujours.

Contre-exemple fondamental: $D = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$. L'ensemble D est borné (majoré par $\frac{3}{2}$, car $x^2 \leq 2 \leq \frac{9}{4} = (\frac{3}{2})^2 \Rightarrow x \leq \frac{3}{2}$, et minoré par $-\frac{3}{2}$). En revanche, on a:

Proposition 1.2. Si $x = \sup D$ existe, alors $x^2 = 2$.

Preuve. 1) Supposons par l'absurde que $x^2 < 2$. On choisit un entier $n > \frac{2x+1}{2-x^2}$ et on pose $d = x + \frac{1}{n}$. Alors $d \in D$: en effet, $d \in \mathbb{Q}$ et $d^2 = (x + \frac{1}{n})^2 = x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} \leq x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n} = x^2 + \frac{2x+1}{n} \leq 2$ (puisque $x^2 + \frac{2x+1}{n} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{n} \leq 2 - x^2 \Leftrightarrow n \geq \frac{2x+1}{2-x^2}$). Donc $d \in D$ et $d = x + \frac{1}{n} > x$. C'est absurde, car x est un majorant de D .

2) Supposons par l'absurde que $x^2 > 2$. Alors ... (exercice difficile!) ... Absurde!

3) Comme on n'a ni $x^2 < 2$, ni $x^2 > 2$, on a $x^2 = 2$. □

Corollaire 1.3. $\sup D$ n'existe pas dans $\mathbb{Q}$.

Preuve. Il n'y a pas de $x \in \mathbb{Q}$ avec $x^2 = 2$, cf Prop. 1.1. $\square$

Cette procédure nous indique où ajouter des nombres !

Construction des nombres réels: $\mathbb{R}$ s'obtient à partir de $\mathbb{Q}$ en ajoutant les sup et les inf de tous les sous-ensembles bornés $A \subseteq \mathbb{Q}$.

3 Propriétés des nombres réels

- (i) $\mathbb{R}$ est un **corps** $(0, 1, +, \cdot, \text{inverses, distributivité}, \dots)$ muni d'un **ordre total** $(x \leq y)$.
- (ii) Les définitions de majoré, minoré, max, min, suprémum, infimum restent les mêmes que pour $\mathbb{Q}$ (remplacer $\mathbb{R}$ par $\mathbb{Q}$ dans les définitions).
- (iii) La procédure de la construction de $\mathbb{R}$ est réussie. En effet, on a :

Théorème 1.4. Si $A \subseteq \mathbb{R}$ est non vide et $\begin{matrix} \text{majoré} \\ \text{minoré} \end{matrix}$, alors $\begin{matrix} \sup A \in \mathbb{R} \\ \inf A \in \mathbb{R} \end{matrix}$ existe et est unique.

En fait, si $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2\}$, alors $\sup D$ et $\inf D$ existent, et sont solutions de $x^2 = 2$. Donc $\sup D = \sqrt{2}$ et $\inf D = -\sqrt{2}$.

Exemple de calcul de de sup / inf: $A = \{3 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$. A est majoré par 3 et minoré par 4, donc borné. Comme $4 \in A$, on a $\sup A = \max A = 4$. On va montrer que $\inf A = 3$. C'est bien un minorant, il faut donc montrer que c'est le plus grand. On va montrer qu'aucun $x > 3$ ne peut être un minorant, en construisant un $a \in A$ tel que $a < x$. Soit $x > 3$. On choisit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > \frac{1}{x-3}$, et on pose $a = 3 + \frac{1}{n}$. Alors $a \in A$ et $a = 3 + \frac{1}{n} < x$, puisque $3 + \frac{1}{n} < x \Leftrightarrow \frac{1}{n} < x - 3 \Leftrightarrow n > \frac{1}{x-3}$. Ainsi x n'est pas un minorant, et 3 est donc le plus petit ; c'est $\inf A$. Comme $3 \notin A$, $\min A$ n'existe pas.

- (iv) Pour $A \subseteq \mathbb{R}$ non-vide et borné, $\begin{matrix} \max A \\ \min A \end{matrix}$ existe si et seulement si $\begin{matrix} \sup A \in A \\ \inf A \in A \end{matrix}$ et dans ce cas, $\begin{matrix} \max A = \sup A \\ \min A = \inf A \end{matrix}$.

- (v) **Théorème 1.5** (Pince à épiler / ε -sup). Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ non vide et borné. Alors $\begin{matrix} s = \sup A \\ t = \inf A \end{matrix}$ si et seulement si 1) $\begin{matrix} a \leq s \\ t \leq a \end{matrix}$ pour tout $a \in A$ et 2) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ tel que $\begin{matrix} s - \varepsilon \leq a \leq s \\ t \leq a \leq t + \varepsilon \end{matrix}$.

- (vi) **Intervalles:**

$$\begin{array}{ll} [a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} & [a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} \\]a, b[= & < < &]a, +\infty[= & < \\ [a, b[= & \leq < &]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\} \\]a, b] = & < \leq &]-\infty, b[= & < \end{array}$$

Les 4 de gauches sont bornés, et ont a pour inf et b pour sup.

4 Représentation décimale

Tout $x \in \mathbb{R}$ s'écrit

$$x = \pm \underbrace{d_1 d_2 \dots d_n}_{\substack{\text{décimales avant la virgule,} \\ \text{en nombre fini}}} \underbrace{\cdot}_{\text{ou}} \underbrace{d_{n+1} d_{n+2} \dots}_{\substack{\text{décimales après la virgule,} \\ \text{en nombre fini ou infini}}} \quad \text{avec } d_i \in \{0, 1, \dots, 9\}.$$

Exemple: Représentation finie: $1 = 1.0 = 1.000 \dots$, $\frac{3}{2} = 1.5$, $\frac{110}{8} = 13.75$. Représentation périodique: $\frac{5}{7} = 0.\overline{714285} = 0.7142857142857 \dots$. Mais: $\sqrt{2} = 1.414213562373095 \dots$ semble ne pas se répéter...

Théorème 1.6. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x$ a une représentation décimale finie ou périodique.

Idée de preuve. $\Rightarrow$ Vu en classe. $\Leftarrow$ Exemple représentation finie: $x = 3.745 = \frac{3745}{1000}$. Ex. représ. périodique: $x = 41.70\overline{102} \Rightarrow 10^2 x = 4170.\overline{102} \Rightarrow 10^2 10^3 \cdot x = 4170102.\overline{102}$. Donc $10^2 10^3 x - 10^2 x = 4170102 - 4170 = y \in \mathbb{Z}$, d'où $x = \frac{y}{10^2(10^3-1)} \in \mathbb{Q}$. $\square$

Avec la même idée, on montre que $0.\bar{9} = 1$. Conséquences du théorème:

- *Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$* : Pour tous $x < y \in \mathbb{R}$, il existe $a \in \mathbb{Q}$ tel que $x < a < y$ (explications vues en classe).
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe $a \in \mathbb{Q}$ arbitrairement proche de x . Ex: $x = \sqrt{2} = 1.414235 \Rightarrow 1; 1.4; 1.41; 1.414; \dots$ sont $\in \mathbb{Q}$ et s'approchent de $\sqrt{2}$.
- $x = 0,1010010001 \dots \notin \mathbb{Q}$.
- La représentation décimale de $\sqrt{2}$ est infinie non-périodique.

Autres propriétés / définitions:

- L'ensemble $\mathbb{Q}$ est **dénombrable**: on peut lister ses éléments. (Mathématiquement, dénombrable veut dire qu'il existe une fonction bijective $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$). Dessin vu en classe.
- L'ensemble $\mathbb{R}$ est **indénombrable**. Preuve vue en classe.
- Les nombres **irrationnels** sont: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
- La **valeur absolue** d'un nombre $x \in \mathbb{R}$ est

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases} = \text{distance entre 0 et } x.$$

Propriétés: $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $|-x| = |x|$, $|x| \geq 0$, $|xy| = |x||y|$, $|x| = \sqrt{x^2}$, $|x+y| \leq |x| + |y|$ (inégalité triangulaire).

5 Nombres complexes

Il y a beaucoup de nombres dans $\mathbb{R}$, on a par exemple une solution de $x^2 = a$ pour tout $a \geq 0$. Mais pas de solutions à $x^2 = -1$ (Si $x \in \mathbb{R}$, alors x^2 est toujours positif). Faut-il rajouter des nombres? En rétrospective: SUPER IDÉE!

Construction: On munit l'ensemble $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$:

- 1) D'une addition: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$. Interprétation géométrique: c'est l'addition des vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
- 2) D'une multiplication: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$. Interprétation géométrique: plus tard! Ex: $(1, 2) \cdot (3, 4) = (-5, 10)$.

Fait important: Cela fait de $\mathbb{R}^2$ un **corps** (on a $+$, $\cdot$, $0 = (0, 0)$, $1 = (1, 0)$, des inverses, la distributivité,...)

Notations:

- (i) $(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$ et $(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0)$. Cela fait donc sens d'**identifier** $\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ **avec** $\mathbb{R}$ (**via** $(x, 0) \leftrightarrow x$).
- (ii) De plus $(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + b \cdot (0, 1)$. Le "nombre" $(0, 1)$ est intéressant: on a $(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$. On l'appelle **l'unité imaginaire** $i = (0, 1)$.

Ainsi i est solution de $x^2 = -1$, et on peut écrire $(a, b) = a + b(0, 1) = a + bi$.

Définition 1.3. L'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni de ces $+$ et $\cdot$ est le **corps des nombres complexes**, noté $\mathbb{C}$.

Remarque 1.4. • Tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ s'écrit $z = a + bi$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. C'est la **forme cartésienne** de z .

- On peut "oublier" la définition compliquée de $\cdot$, et retenir seulement $i^2 = -1$. En effet: $(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac - bd + (ad + bc)i$.

Représentation graphique: Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on renomme l'axe horizontal "axe réel $\mathbb{R}$ " et l'axe vertical "axe imaginaire" $i\mathbb{R}$. Les nombres complexes sont donc représentés comme des points de $\mathbb{R}^2$ (détails vus en classe).

Définition 1.4. Soit $z = a + bi \in \mathbb{C}$.

- 1) La **partie réelle** de z est $\operatorname{Re}(z) = a$. La **partie imaginaire** de z est $\operatorname{Im}(z) = b$.
- 2) Le **module** (ou valeur absolue) de z est $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \in [0, +\infty[$. C'est la distance entre z et 0 (comme pour $|x|$ dans $\mathbb{R}$).
- 3) L'**argument** de z est $\arg(z) = \text{angle entre } z \text{ et l'axe réel, mesuré } \in]-\pi, \pi]$. Pour $a, b > 0$, on a $\arg(z) = \arctan(b/a)$, et il existe des formules dans les autres cas.
- 4) Le **conjugué complexe** de z est $\bar{z} = a - bi$,

6 Propriétés des nombres complexes

- (i) $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ et $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$. En effet, si $z = a + bi$, alors $\frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{a + bi + a - bi}{2} = \frac{2a}{2} = a$, et c'est similaire pour $\operatorname{Im}(z)$.
- (ii) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$, $\overline{z_1/z_2} = \bar{z}_1/\bar{z}_2$. (Preuve: Exercices).
- (iii) $|z|^2 = z\bar{z}$. En effet, $|z|^2 = a^2 + b^2$ et $z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$. Conséquence: $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$. En effet, $|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = z_1 \bar{z}_1 z_2 \bar{z}_2 = |z_1|^2 |z_2|^2$, et on obtient l'égalité voulue en prenant la racine.
- (iv) **Proposition 1.7** (Inversion). Soit $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Alors $\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|^2} \bar{z}$.

Preuve. Si $z' = \frac{1}{|z|^2} \bar{z}$, alors $zz' = \frac{z\bar{z}}{|z|^2} = 1$. □

Remarque 1.5. Pour s'en rappeler, on peut "multiplier" par $\bar{z}$ en haut et en bas. Explicitement, si $z = a + bi$, alors $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i$. Exemple: $\frac{1}{2+3i} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$ (détails vu en classe).

- (v) Si $c \in \mathbb{R}$, alors $\operatorname{Re}(cz) = c \cdot \operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(cz) = c \cdot \operatorname{Im}(z)$, $|cz| = |c| \cdot |z|$, et si $c > 0$, $\arg(cz) = \arg(z)$. Finalement, $|\bar{z}| = |z|$ et, si $z \notin \mathbb{R}_{<0}$, $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$.

Trois formes des nombres complexes:

- 1) Tout $z \in \mathbb{C}$ s'écrit $z = a + bi$, avec $a, b \in \mathbb{R}$; c'est la **forme cartésienne**.
- 2) Si $r = |z|$, et $\theta = \arg(z)$, alors $\cos(\theta) = \frac{a}{r}$ et $\sin(\theta) = \frac{b}{r}$. Donc tout $z \in \mathbb{C}$ s'écrit $z = a + bi = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ avec $r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$; c'est la **forme polaire**.
- 3) Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit: $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$. (Justification plus tard!) Avec cette notation, tout $z \in \mathbb{C}$ s'écrit $z = re^{i\theta}$, avec $r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$; c'est la **forme polaire (exponentielle)**.

Définition 1.5 (Exponentielle complexe). Pour $z = a + bi \in \mathbb{C}$, on définit

$$e^z = e^a e^{ib} = e^a (\cos(b) + i \sin(b)).$$

Remarque 1.6. En forme cartésienne, les additions et soustractions sont faciles, mais les multiplications et divisions demandent des formules plus compliquées. En forme polaire (exp), c'est l'inverse: si $z_1 = re^{i\theta}$ et $z_2 = se^{i\varphi}$, alors $z_1 z_2 = (rs)e^{i(\theta+\varphi)}$ et $z_1/z_2 = (r/s)e^{i(\theta-\varphi)}$.

Exemples: Si $z = 1 + i$, alors $|z| = \sqrt{2}$ et $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$, donc $z = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$. Si $z = 3e^{i5\pi/6}$, alors $z = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$ (détails vus en classe).

Conséquences de la définition d'exponentielle complexe:

- Pour $z \in \mathbb{C}$, on a $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$ (preuve en exercice). Donc si $z = re^{i\theta}$, on a $\bar{z} = re^{-i\theta}$.
- Interprétation géométrique de la multiplication complexe: Les modules se multiplient ($\Rightarrow$ agrandissement) et les arguments s'ajoutent ($\Rightarrow$ rotation). Ainsi $i \cdot z = z$ tourné d'un angle de $\pi/2$ (détails vus en classe).
- Formule d'Euler: $e^{i\pi} + 1 = 0$. Donc $e^{i\pi} = -1$.
- Formule de Moivre: $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$ pour $n \in \mathbb{N}$: Cela suit du fait que $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.
- Formules pour $\cos \theta, \sin \theta$:

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

En effet, $\cos(\theta) = \operatorname{Re}(e^{i\theta})$ et $\sin(\theta) = \operatorname{Im}(e^{i\theta})$; ces formules suivent donc des formules pour $\operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(z)$ vues plus haut.

7 Calculs dans $\mathbb{C}$

- 1) Calcul de $(1 - \sqrt{3}i)^{30}$. Très long si on doit développer! Mieux: $1 - \sqrt{3}i = 2e^{-i\pi/3}$ (dessin vu en classe) et donc $(1 - \sqrt{3}i)^{30} = 2^{30}e^{-i10\pi} = 2^{30}(-1)^{10} = 2^{30}$.

- 2) Racines n -ièmes: On fixe $\omega \in \mathbb{C}^*$ et on cherche $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^n = \omega$. En écrivant $z = re^{i\theta}$ et $\omega = se^{i\varphi}$, on a

$$z^n = \omega \Leftrightarrow r^n e^{in\theta} = se^{i\varphi} \Leftrightarrow r^n = s \text{ et } n\theta = \varphi + \underbrace{k \cdot 2\pi}_{\text{Attention!}}, \text{ pour } k \in \mathbb{Z}.$$

D'où $z = \sqrt[n]{s} e^{i\frac{\varphi+k2\pi}{n}}$. Ces solutions sont distinctes pour $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, mais si $k = n$, on a $e^{i\frac{\varphi+n2\pi}{n}} = e^{i\frac{\varphi}{n}+2\pi} = e^{i\frac{\varphi}{n}} = e^{i\frac{\varphi+0 \cdot 2\pi}{n}}$, on retrouve donc la solution $k = 0$. Il y a donc n solutions distinctes à l'équation $z^n = \omega = se^{i\varphi}$, données par:

$$z \in \{ \sqrt[n]{s} e^{i\frac{\varphi+k2\pi}{n}} \mid k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \}.$$

Exemple:

- $z^3 = 1 = 1 \cdot e^{i0}$ possède les trois solutions $1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}$; elles forment un triangle équilatéral.
- De même, $z^n = 1$ possède n solutions distinctes $1, e^{i\frac{2\pi}{n}}, e^{i\frac{4\pi}{n}}, \dots, e^{i\frac{2\pi(n-1)}{n}}$.
- $z^3 = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ possède les solutions $e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3})} = e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, et $e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3})} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$.

Remarque 1.7. Parfois la méthode générale est trop compliquée! Par exemple:

- $z^2 = 1 \Leftrightarrow z = \pm 1$.
- $z^2 = 5 + 12i$: la méthode générale donne $z = \sqrt{13} e^{i(\frac{\arctan(12/5)}{2} + k\pi)}, k = 0, 1$. Pour exprimer cela en forme cartésienne, on peut poser $z = a + bi \Rightarrow z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$ et trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 - b^2 = 5$ et $2ab = 12$. On peut également s'apercevoir qu'une des deux solutions vérifie $\arg(z) = \arg(5 + 12i)/2$, et se trouve donc sur la bissectrice de l'angle formé par $\omega = 5 + 12i$ et l'axe réel. Donc z est sur la diagonale du losange de sommets $0, \omega, |\omega| = 13$ et $\omega + 13$. Ainsi $\arg(z) = \arg(\omega + 13) = \arg(18 + 12i) = \arg(3 + 2i)$. On remarque alors que $|z|$ doit être égal à $\sqrt{13}$; comme $|3 + 2i| = \sqrt{13}$, on en déduit les 2 solutions $\pm(3 + 2i)$.

- 3) Factorisation de polynômes:

Théorème 1.8 (Théorème fondamental de l'algèbre). *Tout polynôme $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, avec $a_i \in \mathbb{C}$, se factorise en*

$$P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n).$$

Corollaire 1.9. *Toute équation polynomiale $P(z) = 0$ de degré n a n solutions complexes (en comptant les multiplicités).*

Exemple: Si $P(z) = az^2 + bz + c$, alors les solutions de $P(z) = 0$ sont $z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, où l'on interprète $\pm \sqrt{b^2 - 4ac}$ comme les deux solutions complexes de l'équation $\omega^2 = b^2 - 4ac$. Donc si $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $b^2 - 4ac \geq 0$, on a des solutions réelles, et si $b^2 - 4ac < 0$, on a $w^2 = b^2 - 4ac = i^2(4ac - b^2) \Rightarrow w = \pm i\sqrt{4ac - b^2}$.

Remarque 1.8. Si les coefficients a_i d'un polynôme $P(z)$ sont réels, alors on peut montrer que pour toute racine $z_0 \in \mathbb{C}$, $\bar{z}_0$ est aussi une racine de $P(z)$. En groupant les facteurs complexes conjugués comme

$$(z - z_0)(z - \bar{z}_0) = z^2 \underbrace{-2\operatorname{Re}(z_0)}_{\in \mathbb{R}} \cdot z + \underbrace{|z_0|^2}_{\in \mathbb{R}}$$

on peut transformer une décomposition en facteur irréductibles complexes en une décomposition en facteurs irréductibles réels.

Chapitre 2: Suites

1 Définitions et exemples

Définition 2.1. Une **suite de nombres réels** est un ensemble infini de nombres numérotés $(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots)$ avec $a_i \in \mathbb{R}$. Notation:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_n)_{n \geq 0} = (a_n)_n = (a_n) = (a_0, a_1, a_2, \dots).$$

Exemples:

- 1) $a_n = 2n + 1$ ($n \in \mathbb{N}$). Ce sont les nombres impairs. Donc $a_0 = 1, a_1 = 3, a_2 = 5, a_3 = 7, 9, 11, \dots$.
- 2) **Suite harmonique:** $a_n = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Donc $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$.
- 3) **Suite arithmétique:** $a_n = bn + c$ ($n \in \mathbb{N}, b, c \in \mathbb{R}$). Donc $a_0 = c, a_1 = b + c, a_2 = 2b + c, a_3 = 3b + c, \dots$. Exemples: $b = 2, c = 1 \Rightarrow a_n = 2n + 1$; $b = 1, c = 0 \Rightarrow a_n = n$; $b = 0 \Rightarrow (a_n) = (c, c, c, c, c, \dots)$ (suite constante).
- 4) **Suite géométrique:** $a_n = ar^n$ ($n \in \mathbb{N}, a, r \in \mathbb{R}$; le r est la **raison** de la suite). Donc $a_0 = a, a_1 = ar, a_2 = ar^2, a_3 = ar^3, \dots$. Exemples: $a = 1, r = 2 \Rightarrow a_n = 2^n$ ($a_0 = 1, 2, 4, 8, 16, \dots$); $a = 1, r = \frac{1}{2} \Rightarrow a_n = \frac{1}{2^n}$ ($a_0 = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$); $a = 1, r = -1 \Rightarrow a_n = (-1)^n$ ($a_0 = 1, -1, 1, -1, 1, \dots$).

Remarque 2.1. Formellement, une suite est une fonction $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}; f(n) = a_n$.

Définition 2.2. Une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est

- 1) majorée (resp. minorée, bornée) si l'ensemble A l'est.
- 2) croissante (resp. strictement croissante, décroissante, strictement décroissante) si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{n+1} \geq a_n$ (resp. $a_{n+1} > a_n, a_{n+1} \leq a_n, a_{n+1} < a_n$).
- 3) (strictement) monotone si (strictement) croissante ou (strictement) décroissante.

Proposition 2.1. Une suite (a_n) est bornée $\Leftrightarrow$ il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|a_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve. Exercice. □

Exemples:

- 1) $a_n = 2n + 1 \Rightarrow A = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$. A est minoré par 1, mais pas majoré, donc pas borné. C'est pareil pour la suite (a_n) (mais en accordant les adjectifs!). De plus, $a_{n+1} = 2(n+1) + 1 = 2n + 3 > 2n + 1 = a_n$, donc la suite est strictement croissante (et donc aussi strictement monotone).
- 2) Suite harmonique: $a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$. La suite est donc bornée (majorée par 1, minorée par 0) et strictement décroissante ($a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n$).

- 3) Suite arithmétique: $a_n = bn + c$. Si $b > 0$, (a_n) est strictement croissante, minorée par $c = a_0$ mais pas majorée: en effet, si $M \in \mathbb{R}$, alors $a_n > M$ dès que $n > \frac{M-c}{b}$ (car $bn + c > M \Leftrightarrow n > \frac{M-c}{b}$).
- 4) Suite géométrique: $a_n = ar^n$. Si $a > 0$, la suite est strictement croissante pour $r > 1$, strictement décroissante pour $0 < r < 1$, bornée pour $r \in [-1, 1]$, pas majorée pour $r > 1$ (cf exercices).

Définition 2.3 (Suites définies par récurrence). a_0 = valeur fixée, $a_{n+1} = g(a_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$, où $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction.

Ex: $a_0 = 0$, $g(x) = x + 1$. Donc $a_1 = g(a_0) = 0 + 1 = 1$, $a_2 = g(a_1) = 1 + 1 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$... **Affirmation:** $a_n = n$ pour tous $n \in \mathbb{N}$.

Pour démontrer ce genre de résultat, on utilise la:

Définition 2.4 (Preuve par récurrence). Si $P(n)$ est une proposition qui dépend d'un entier n , et si

- 1) *Initialisation:* $P(n_0)$ est vraie et
- 2) *Pas de récurrence:* $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ pour tous $n \geq n_0$,

alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Preuve de l'affirmation. On montre $P(n) = "a_n = n"$ par récurrence sur $n \geq 0$.

- 1) *Initialisation:* $a_0 = 0$, donc $P(0)$ est vraie.
- 2) *Pas de récurrence:* On a

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= g(a_n) = a_n + 1 && \text{par définition} \\ &= n + 1 && \text{par l'hypothèse de récurrence } P(n). \end{aligned}$$

Donc $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

On conclut donc que $P(n) = "a_n = n"$ est vraie pour tout $n \geq 0$. □

Fausse preuves par récurrence:

- 1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n = n + 7$. En effet, si $P(n) = "n = n + 7"$, alors on a $n + 1 \stackrel{P(n)}{=} (n + 7) + 1 = (n + 1) + 7$, et donc $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, et $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$.

Faute: On a oublié l'initialisation: $P(0)$ est fausse, car $0 \neq 7$.

- 2) Tous les chats sont de la même couleur. Traité en classe.

Définition 2.5 (Preuve par récurrence forte). Si $P(n)$ est une proposition qui dépend d'un entier n , et si

- 1) *Initialisation:* $P(n_0)$ est vraie et
- 2) *Pas de récurrence forte:* $\{P(n_0), P(n_0 + 1), \dots, P(n)\} \Rightarrow P(n+1)$ pour tous $n \geq n_0$,

alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Retour aux exemples de suites définies par récurrence:

- 1) $a_0 = 0, a_{n+1} = a_n + 1 \Rightarrow a_n = n$. (cf affirmation précédente)
- 2) $a_0 = c, a_{n+1} = a_n + b \Rightarrow a_n = bn + c$. (Exercice)
- 3) $a_0 = a, a_{n+1} = a_n \cdot r \Rightarrow a_n = ar^n$. (Exercice)
- 4) $a_0 = 0, a_{n+1} = a_n + 2n + 1$. Attention: ce n'est techniquement pas une suite définie par récurrence au sens de la définition précédente, car la fonction $g(x) = x + 2n + 1$ dépend de n . On a $a_0 = 0, a_1 = a_0 + 2 \cdot 0 + 1 = 1, a_2 = a_1 + 2 \cdot 1 + 1 = 1 + 3 = 4, a_3 = 4 + 5 = 9$.

Affirmation: $a_n = n^2$.

Preuve. Par récurrence sur $n \geq 0$.

1) *Initialisation:* $a_0 = 0 = 0^2$.

2) *Pas de récurrence:* $a_{n+1} = a_n + 2n + 1 \stackrel{P(n)}{=} n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.

Donc $a_n = n^2$ pour tout $n \geq 0$. □

- 5) Suite de Fibonacci: $f_0 = 0, f_1 = 1$, et $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Attention: pas non plus "définie par récurrence", car $f_{n+1} = g(f_{n+1}, f_n)$. On a $f_2 = 1, f_3 = 2, f_4 = 3, f_5 = 5, f_6 = 8, 13, 21, 34, \dots$.

Affirmation: f_n est croissante et non-majorée.

Preuve. On montre déjà que $f_n \geq n$ si $n \geq 5$, par récurrence forte sur n .

1) *Initialisation:* $f_5 = 5 \geq 5, f_6 = 8 \geq 6$.

2) *Pas de récurrence:* $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \stackrel{P(n+1), P(n)}{\geq} (n+1) + n \geq n+2$.

Donc f_n est non bornée, et comme $f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \geq f_n$, elle est croissante. □

En fait, on peut montrer $f_n = \frac{\alpha^n - (-\alpha)^{-n}}{\sqrt{5}}$, où $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ est le *nombre d'or*.

(Preuve: algèbre linéaire!)

2 Convergence et limites

Idee: On considère $a_n = \frac{1}{n} (n \in \mathbb{N}^*)$. Alors a_n s'approche de plus en plus de 0. Plus précisément: a_n devient et reste *aussi proche de 0 que l'on veut*, pourvu qu'on prenne n assez grand.

Définition 2.6. Une suite $(a_n)_n$ **converge vers** $a \in \mathbb{R}$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $|a_n - a| \leq \varepsilon$. Notation: $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a, a_n \longrightarrow a, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Avec des mots: a_n est et reste *arbitrairement proche* de a , pour n assez grand.

Définition 2.7. • Si (a_n) converge vers $a \in \mathbb{R}$, alors a est la **limite** de a_n lorsque n tend vers l'infini.

- Si (a_n) ne converge vers aucun $a \in \mathbb{R}$, on dit que la suite **diverge**.

Exemples:

- 1) Soit $a_n = \frac{1}{n} (n \in \mathbb{N}^*)$. Alors $a_n \longrightarrow 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. On choisit $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq \frac{1}{\varepsilon}$. Alors dès que $n \geq N$, on a

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} \leq \varepsilon, \quad (\text{car } \frac{1}{N} \leq \varepsilon \Leftrightarrow N \geq \frac{1}{\varepsilon}).$$

Comme ε était arbitraire, on a montré:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, \text{ on a } |a_n - 0| \leq \varepsilon.$$

Donc $a_n \rightarrow 0$. □

2) Soit $a_n = (-1)^n$ ($n \in \mathbb{N}$). Alors (a_n) diverge.

Preuve. Soit $a \in \mathbb{R}$. Il faut montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe un $n \geq N$ tel que a_n est loin de a . Si $a \geq 0$, on prend $n \geq N$ impair, de sorte que $a_n = -1$, et donc $|a_n - a| \geq 1$, et si $a \leq 0$, on prend $n \geq N$ pair, de sorte que $a_n = 1$, et donc $|a_n - a| \geq 1$. □

3) Soit $a_n = n$ ($n \in \mathbb{N}$). Alors (a_n) diverge.

Preuve. Pour $a \in \mathbb{R}$, et $N \in \mathbb{N}$, on choisit $n \geq \max(N, a + 2)$. Ainsi $|a_n - a| = |n - a| \geq 2$, donc a_n reste loin de a . □

4) Soit $a_n = c$ (suite constante). Alors $a_n \rightarrow c$ (vu en classe).

Proposition 2.2 (Unicité de la limite). *Si (a_n) converge, sa limite est unique.*

Preuve. Supposons par l'absurde que $a_n \rightarrow a$ et $a_n \rightarrow b$ avec $a \neq b$. On pose $\varepsilon = \frac{|a-b|}{10}$. Par définition, il existe N_a tel que $|a_n - a| \leq \varepsilon$ dès que $n \geq N_a$, et il existe N_b tel que $|a_n - b| \leq \varepsilon$ dès que $n \geq N_b$. Donc pour $n \geq N_a, N_b$, on a

$$|a - b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a_n - a| + |a_n - b| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon < |a - b|,$$

donc $|a - b| < |a - b|$, ce qui est absurde. □

Proposition 2.3. *Si (a_n) converge, alors (a_n) est bornée.*

Idée de la preuve. Vue en classe. (Preuve formelle laissée en exercice) □

3 Propriétés des limites

Proposition 2.4 (Propriétés algébriques des limites). *Si (a_n) et (b_n) sont deux suites convergentes, alors:*

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (pa_n + qb_n) = p \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + q \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$,
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right)$,
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$ si $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$.

Preuve. Posons $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, et $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Soit $\varepsilon > 0$.

- 1) On choisit N tel que pour $n \geq N$, on a $|a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2|p|}$ et $|b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2|q|}$. Donc, dès que $n \geq N$, on a

$$\begin{aligned} |pa_n + qb_n - (pa + qb)| &= |p(a_n - a) + q(b_n - b)| \\ &\leq |p| \underbrace{|a_n - a|}_{\leq \varepsilon/2|p|} + |q| \underbrace{|b_n - b|}_{\leq \varepsilon/2|q|} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

- 2) On choisit N tel que pour $n \geq N$, on a $|a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2(1+|b|)}$ et $|b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2|a|}$ et ≤ 1 . Donc, dès que $n \geq N$, on a

$$\begin{aligned} |a_nb_n - ab| &= |a_nb_n - ab_n + ab_n - ab| \\ &\leq |a_n - a| \underbrace{|b_n|}_{\substack{=|b_n-b+b| \\ \leq |b_n-b|+|b| \\ \leq 1+|b|}} + |a| \underbrace{|b_n - b|}_{\leq \varepsilon/2|a|} \leq \underbrace{|a_n - a|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2(1+|b|)}} (1 + |b|) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

- 3) Exercice.

Comme $\varepsilon > 0$ était arbitraire, 1), 2) et 3) en découlent. $\square$

Exemples:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{3n-5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(2+3/n)}{n(3-5/n)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2+3/n}{\lim_{n \rightarrow \infty} 3-5/n} = \frac{2+0}{3-0} = \frac{2}{3}. \text{ Attention:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{3n-5} \neq \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2n+3}{\lim_{n \rightarrow \infty} 3n-5} \text{ car ces limites n'existent pas.}$$

- 2) Fausse preuve que $1 = 2$ (vu en classe)

- 3) Les suites arithmétiques $a_n = bn + c$ divergent si $b \neq 0$.

Preuve. Sinon, on aurait $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - c}{b} = \frac{a - c}{b}$. Mais on a vu que $\lim_{n \rightarrow \infty} n$ n'existe pas! $\square$

Proposition 2.5. Si (a_n) et (b_n) convergent et $a_n \leq b_n$ pour n assez grand¹, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire, et $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n \geq N$, on a $a_n \leq b_n$, $|a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $|b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Alors $a \leq a_n + \frac{\varepsilon}{2} \leq b_n + \frac{\varepsilon}{2} \leq b + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = b + \varepsilon$. On a donc montré que $a \leq b + \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$. D'où $a \leq b$. $\square$

Théorème 2.6 (Deux Gendarmes / Sandwich). Si $a_n \leq b_n \leq c_n$ pour n assez grand, et si $a_n \rightarrow \ell$ et $c_n \rightarrow \ell$, alors $b_n \rightarrow \ell$.

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $a_n \leq b_n \leq c_n$, $|a_n - \ell| \leq \varepsilon$ et $|c_n - \ell| \leq \varepsilon$. Alors $-\varepsilon \leq a_n - \ell \leq b_n - \ell \leq c_n - \ell \leq \varepsilon$, d'où $-\varepsilon \leq b_n - \ell \leq \varepsilon \Leftrightarrow |b_n - \ell| \leq \varepsilon$. $\square$

Exemples plus compliqués:

1. c'est à dire s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $a_n \leq b_n$ dès que $n \geq N$

- 1) Pour tout $x > 0$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = 1$.

Preuve. Si $x \geq 1$, on a $0 \leq \sqrt[n]{x} - 1 \leq \frac{x-1}{n}$. En effet, comme $1 \leq x$, on a $\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{x}$, et donc $\sqrt[n]{x} - 1 \geq 0$. De l'autre côté, on a, par un exercice

$$(y-1)(y^{n-1} + y^{n-2} + \dots + y + 1) = y^n - 1 \Rightarrow y - 1 = \frac{y^n - 1}{y^{n-1} + y^{n-2} + \dots + y + 1}.$$

On applique cela à $y = \sqrt[n]{x}$, pour trouver

$$0 \leq \sqrt[n]{x} - 1 = \frac{x - 1}{\underbrace{x^{\frac{n-1}{n}}}_{\geq 1} + \underbrace{x^{\frac{n-2}{n}}}_{\geq 1} + \dots + \underbrace{x^{\frac{1}{n}}}_{\geq 1} + 1} \leq \frac{x - 1}{n} \rightarrow 0$$

Par le théorème des deux gendarmes, on a donc $\sqrt[n]{x} - 1 \rightarrow 0$, d'où $\sqrt[n]{x} \rightarrow 1$.

Et si $x \leq 1$, on pose $y = \frac{1}{x} \geq 1$, et on utilise la partie précédente pour trouver

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{y}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{y}} = \frac{1}{1} = 1. \quad \square$$

- 2) Suites géométriques $a_n = ar^n$, pour $a > 0$ et $r > 0$. La suite converge vers 0 si $0 < r < 1$, est constante $= a$ si $r = 1$, et diverge si $r > 1$.

Preuve. Si $r > 1$, on pose $t = r - 1$, et on observe que $r^n - r^{n-1} = r^{n-1}(r - 1) = r^{n-1}t \geq t$. Donc

$$a_n = ar^n = a(\underbrace{r^n - r^{n-1}}_{\geq t} + \underbrace{r^{n-1} - r^{n-2}}_{\geq t} + \dots + \underbrace{r^2 - r^1}_{\geq t} + \underbrace{r^1 - r^0}_{=t} + \underbrace{1}_{\geq 0}) \geq at \cdot n.$$

Comme atn est une suite arithmétique ($b = ar > 0$), elle n'est pas bornée, et donc a_n non plus. Si $r < 1$, soit $\varepsilon > 0$. On pose $b_n = \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a} s^n$ avec $s = \frac{1}{r} > 1$, et donc b_n n'est pas bornée (par la partie précédente).. On trouve donc N tel que pour tous $n \geq N$, on a $b_n \geq \frac{1}{\varepsilon}$. Alors, dès que $n \geq N$, $|a_n - 0| = a_n = \frac{1}{b_n} \leq \varepsilon$. $\square$

- 3) Soit $a_n = \frac{5^n}{n!}$. Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (traité en classe). De manière similaire, $\frac{x^n}{n!} \rightarrow 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4 Limites infinies

Définition 2.8. Une suite (a_n) **tend vers** $\begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix}$ si pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$

tel que pour tout $n \geq N$, on a $\frac{a_n \geq A}{a_n \leq A}$. Notation: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty$, $a_n \rightarrow \pm\infty$.

Avec des mots: a_n devient et reste arbitrairement $\begin{matrix} \text{grand} \\ \text{petit} \end{matrix}$, pour n assez grand. Attention:

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty$, la suite (a_n) n'est pas bornée, donc divergente! Exemples:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$. Soit $A \in \mathbb{R}$. On choisit $N \geq A$. Alors dès que $n \geq N$, on a $a_n = n \geq N \geq A$. Comme A était arbitraire, on a $a_n \rightarrow +\infty$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = +\infty$. Vu en classe.

Proposition 2.7 (Opérations algébriques sur les limites infinies). Soient (a_n) et (b_n) deux suites.

- 1) $(\begin{smallmatrix} +\infty + \infty = +\infty \\ -\infty - \infty = -\infty \end{smallmatrix})$ Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{smallmatrix} +\infty \\ -\infty \end{smallmatrix}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \begin{smallmatrix} +\infty \\ -\infty \end{smallmatrix}$ et $p, q > 0$, alors on a $\lim_{n \rightarrow \infty} (pa_n + qb_n) = \begin{smallmatrix} +\infty \\ -\infty \end{smallmatrix}$. Attention: $\infty - \infty$ et $0 \cdot \infty$ ne sont pas définis.
- 2) $(\pm\infty + c = \pm\infty)$ Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty$ et (b_n) est bornée, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \pm\infty$.
- 3) (Théorème du gendarme seul / de la tartine) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{smallmatrix} +\infty \\ -\infty \end{smallmatrix}$ et $\begin{smallmatrix} b_n \geq a_n \\ b_n \leq a_n \end{smallmatrix}$ pour n assez grand, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \begin{smallmatrix} +\infty \\ -\infty \end{smallmatrix}$.
- 4) $((+\infty) \cdot (\pm\infty) = \pm\infty)$ Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \pm\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \pm\infty$.
- 5) $(\frac{c}{\pm\infty} = 0)$ Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty$ et (b_n) est bornée, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$. Attention: $\frac{\infty}{\infty}$ et $\frac{0}{0}$ ne sont pas définis.

Preuve. 1)-4) exercice facile. Pour 5) soit $\varepsilon > 0$. Soit M tel que $|b_n| \leq M$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n \geq N$, on a $|a_n| \geq A = \frac{M}{\varepsilon}$ (possible car $a_n \rightarrow \pm\infty$). Alors, pour $n \geq N$, $|\frac{b_n}{a_n} - 0| = \frac{|b_n|}{|a_n|} \leq \frac{M}{|a_n|} \leq \varepsilon$. Comme ε était arbitraire, on a bien $\frac{b_n}{a_n} \rightarrow 0$. $\square$

Formes indéterminées:

- 1) $\infty - \infty$. On considère les trois suites $a_n = (n+1)^2 - n^2$, $b_n = (n+1) - n$, et $c_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. En prenant la limite, les trois sont du type $\infty - \infty$, mais on a $a_n \rightarrow \infty$, $b_n \rightarrow 1$, et $c_n \rightarrow 0$ (détails vus en classe).
- 2) $\infty \cdot 0$. On considère les trois suites $a_n = n^2 \cdot \frac{1}{n}$, $b_n = n \cdot \frac{1}{n}$, et $c_n = \sqrt{n} \cdot \frac{1}{n}$. En prenant la limite, les trois sont du type $\infty \cdot 0$, mais on a $a_n \rightarrow \infty$, $b_n \rightarrow 1$, et $c_n \rightarrow 0$.
- 3) $\frac{\infty}{\infty}$. On considère $a_n = \frac{n^2+1}{n^k+2}$. Si $k = 1$, $a_n \rightarrow \infty$, si $k = 2$, $a_n \rightarrow 1$ et si $k = 3$, $a_n \rightarrow 0$.
- 4) $\frac{0}{0}$. Prendre l'inverse en haut et en bas dans l'exemple précédent.

5 Limsup et Liminf

Définition 2.9. Soit (a_n) une suite. Alors:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{a_m \mid m \geq n\} \quad \text{et} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf\{a_m \mid m \geq n\}.$$

Si a_n n'est pas $\begin{smallmatrix} \text{majorée} \\ \text{minorée} \end{smallmatrix}$ on pose $\begin{smallmatrix} \limsup = +\infty \\ \liminf = -\infty \end{smallmatrix}$.

Remarque 2.2. • Pour (a_n) générale, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ n'existe pas forcément, mais $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ existent toujours! (vu plus tard).

- On a $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$, avec égalité si et seulement si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ existe! Dans ce cas, $\liminf = \lim = \limsup$.

Exemples:

- $a_n = (-1)^n \Rightarrow a_n = 1, -1, 1, -1, 1, \dots$. Donc $A_n = \{a_m \mid m \geq n\} = \text{"tous les } a_m \text{ après } a_n" = \{-1, 1\}$. Ainsi $\sup A_n = 1$ et $\inf A_n = -1$, d'où

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup A_n = 1 \quad \text{et} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf A_n = -1.$$

- $a_n = \frac{1-(-2)^n}{2^n-1}, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a_n = 3, -1, \frac{9}{7}, -1, \frac{33}{31}, -1, \dots$. Si n est pair, on a $a_n = \frac{1-2^n}{2^n-1} = -1$, et si n est impair, $a_n = \frac{2^{n+1}-1}{2^n-1} > 1$. Pour $\liminf$, on observe alors que $A_n = \{a_m \mid m \geq n\} = \{-1, *, -1, *, -1, *, \dots\}$, où $*$ > 1 , et donc $\inf A_n = -1$, d'où $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf A_n = -1$. Pour $\limsup$, on observe que

$$A_n = \{a_m \mid m \geq n\} \subseteq A'_n = \{-1, \frac{2^n+1}{2^n-1}, \frac{2^{n+1}+1}{2^{n+1}-1}, \frac{2^{n+2}+1}{2^{n+2}-1}, \dots\}.$$

Or la suite $\frac{2^n+1}{2^n-1}$ est décroissante: on vérifie que $\frac{2^n+1}{2^n-1} \geq \frac{2^{n+1}+1}{2^{n+1}-1}$. Il suit que $\sup A'_n = \frac{2^n+1}{2^n-1}$. Comme $A_n \subseteq A'_n$, on a donc

$$1 \leq \sup A_n \leq \sup A'_n = \frac{2^n+1}{2^n-1} \rightarrow 1.$$

Par le théorème des deux gendarmes, $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup A_n = 1$.

En résumé: comment calculer $\liminf$ et $\limsup$?

- Écrire quelques termes de la suite, pour comprendre $A_n = \{a_m \mid m \geq n\}$.
- Trouver une sous-suite convergente.

Définition 2.10. Pour une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ et une fonction $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante ($f(n) < f(n+1)$), la **sous-suite** correspondante est $(a_{f(n)})_{n \geq 0}$.

Exemples:

- $a_n = (-1)^n \Rightarrow a_{2n} = (-1)^{2n} = 1$, donc (a_{2n}) est une sous-suite constante $= 1$, et $a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$, donc (a_{2n+1}) est une sous-suite constante $= -1$.
- $a_n = \frac{1-(-2)^n}{2^n-1} \Rightarrow a_{2n} = -1$, donc (a_{2n}) est une sous-suite constante $= -1$, et $a_{2n+1} = \frac{2^{2n+1}-1}{2^{2n+1}-1}$, donc (a_{2n+1}) est une sous-suite qui converge vers 1.

En fait, on a:

Théorème 2.8. Pour une suite bornée, on a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} = \max \left\{ \begin{array}{c} \text{limites de sous-suites} \\ \text{convergentes} \end{array} \right\} \quad \text{et} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} = \min \left\{ \begin{array}{c} \text{limites de sous-suites} \\ \text{convergentes} \end{array} \right\}.$$

6 Critères de convergence

Question: (a_n) converge-t-elle? (Pas: vers quoi)

Théorème 2.9 (Croissante + majorée). Toute suite $\begin{array}{l} \text{croissante } (a_{n+1} \geq a_n) \\ \text{majorée} \\ \text{minorée} \end{array}$ converge. $\begin{array}{l} \text{décroissante } (a_{n+1} \leq a_n) \\ \text{et} \end{array}$

Corollaire 2.10. Toute suite monotone et bornée converge.

Exemple: Pour (a_n) bornée, $s_n = \sup \underbrace{\{a_m \mid m \geq n\}}_{A_n}$ est minorée, et on a $s_{n+1} = \sup_{A_{n+1} \subseteq A_n} A_{n+1} \leq \sup A_n = s_n$. La suite (s_n) est donc décroissante et minorée $\Rightarrow (s_n)$ converge $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ existe. (Similaire pour $\liminf$).

Preuve du théorème. On suppose que (a_n) est croissante et majorée. Soit $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ et on pose $s = \sup A$. Par le théorème "pince à épiler", on a 1) $s \geq a$ pour tout $a \in A$, et 2) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a = a_N \in A$ tel que $s - \varepsilon \leq a_N \leq s$. Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ tel que $s - \varepsilon \leq a_N \leq s$, et comme (a_n) est croissante, dès que $n \geq N$, on a également $s - \varepsilon \leq a_N \leq a_n \leq s$. Il suit: $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ tel que $\forall n \geq N$, on a $|a_n - s| \leq \varepsilon$, et donc a_n converge vers s . Le cas décroissante et minorée est similaire (a_n converge alors vers $\inf A$). $\square$

Exemple important: On considère les suites $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$) et b_n définie par $b_0 = 1$ et $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{(n+1)!}$. Une récurrence facile montre que $b_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

Quelques valeurs sont:

$$a_1 = 2, a_2 = 2.25, a_3 = 2.\overline{370}, \dots \quad b_0 = 1, b_1 = 2, b_2 = 2.5, b_3 = 2.\overline{6}, b_4 = 2.708\overline{3}, \dots$$

On a alors:

- (i) $a_n \leq b_n$ pour tous $n \geq 1$,
- (ii) (b_n) est majorée (donc (a_n) aussi),
- (iii) (a_n) est croissante,
- (iv) (b_n) est croissante.

Preuve. (i) On a

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = b_n,$$

où la première et dernière égalité suivent de la définition de a_n et b_n , la seconde d'un exercice $(x+y)^n = \dots$ et l'inégalité du fait que

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \frac{n!/(n-k)!}{n^k} = \frac{1}{k!} \underbrace{\frac{n}{n}}_{\leq 1} \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\leq 1} \underbrace{\frac{n-2}{n}}_{\leq 1} \dots \underbrace{\frac{n-k+1}{n}}_{\leq 1} \leq \frac{1}{k!}.$$

(ii) On a

$$\frac{1}{k!} = \frac{1}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \leq \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2^{k-1}} = 2 \frac{1}{2^k}.$$

Ainsi on obtient

$$b_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \leq 2 \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2 \frac{1 - (1/2)^{n+1}}{1 - (1/2)} \leq 2 \frac{1 - 0}{1/2} = 4,$$

où l'égalité du milieu suit de la formule $x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1 = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ si $x \neq 1$, démontrée en exercice.

(iii) En utilisant le fait que $\frac{a}{b} \leq \frac{a+1}{b+1}$ si $0 < a \leq b$ (exercice facile!), et en reprenant

l'argument du (i), on remarque que

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} &= \frac{1}{k!} \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} \\ &\leq \frac{1}{k!} \frac{n+1}{n+1} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n-1}{n+1} \cdots \frac{n-k+2}{n+1} = \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} \end{aligned}$$

et on a donc

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1}$$

(iv) On a simplement $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{(n+1)!} \geq b_n$. □

Par croissance majorée, (a_n) et (b_n) convergent toutes les deux ! En fait, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = e = 2.7182818 \cdots = \text{Nombre d'Euler.}$$

Théorème 2.11 (Critère de D'Alembert pour les suites). *Soit (a_n) une suite telle que $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ existe $\in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Alors $a_n \rightarrow 0$ si $\rho < 1$ et (a_n) diverge si $\rho > 1$.*

Remarque 2.3. • Attention: le critère ne se prononce pas si $\rho = 1$.

- Version plus générale: $a_n \rightarrow 0$ si $\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ et la suite (a_n) diverge si $\liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$

Preuve. Si $\rho < 1$, alors $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \rightarrow \rho < 1$, on trouve donc un $r < 1$ tel que $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq r$ pour n assez grand, disons $n \geq N$. On a alors

$$0 \leq |a_n| = \underbrace{\frac{|a_n|}{|a_{n-1}|}}_{\leq r} \underbrace{\frac{|a_{n-1}|}{|a_{n-2}|}}_{\leq r} \cdots \underbrace{\frac{|a_{N+1}|}{|a_N|}}_{\leq r} |a_N| \leq |a_N| r^{n-N} = \underbrace{\frac{|a_N|}{r^N}}_{=a} r^n = ar^n \rightarrow 0$$

car cette dernière suite est géométrique avec $r < 1$. Et si $\rho > 1$, on pose $b_n = \frac{1}{a_n}$, et

on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \frac{1}{\rho} < 1$. Donc $|b_n| \rightarrow 0$, et ainsi $|a_n| \rightarrow \infty \Rightarrow (a_n)$

diverge. □

Exemple: $a_n = \frac{n^{140}}{2^n}$. On a $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(n+1)^{140}/2^{n+1}}{n^{140}/2^n} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^{140} \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} < 1$. Donc $a_n \rightarrow 0$.

Convergence de suites définies par récurrence: On considère une suite (a_n) définie par $a_0 = a$, $a_{n+1} = g(a_n)$ pour une fonction $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Idee générale: Si (a_n) converge, disons $a_n \rightarrow \ell$, alors pour n grand,

$$\underbrace{a_n}_x \approx \ell \approx a_{n+1} = g(\underbrace{a_n}_x) \Rightarrow \ell \text{ est solution de } x = g(x).$$

Exemples:

- 1) $a_0 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n - 1 = g(x)$ avec $g(x) = \frac{1}{2}x - 1$. Solution de $x = g(x)$: $x = \ell = -2$. On a $a_0 = 1, a_1 = -\frac{1}{2}, a_2 = -\frac{3}{4}, a_3 = -\frac{5}{8}, \dots, -1.999\dots$. En effet, (a_n) semble donc converger vers -2 .
- 2) $a_0 = 1, a_{n+1} = 3a_n - 1$. On trouve $\ell = \frac{1}{2}$ mais a_n semble diverger! (détails vus en classe).
- 3) $a_0 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = 3a_n - 1 \Rightarrow a_n = \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{2}$ (détails vus en classe).

Théorème 2.12 (Récurrences linéaires). Soit (a_n) définie par récurrence: $a_0 = a_0, a_{n+1} = g(a_n)$ avec $g(x) = qx + b$, pour $q, b \in \mathbb{R}$ et $|q| \neq 1$. Soit ℓ la solution de $x = g(x) \Leftrightarrow \ell = \frac{b}{1-q}$. Alors:

- 1) Si $a_0 = \ell$, la suite est constante $= \ell$,
- 2) Si $a_0 \neq \ell$ et $|q| < 1$, $a_n \longrightarrow \ell$,
- 3) Si $a_0 \neq \ell$ et $|q| > 1$, (a_n) diverge.

Preuve. 1) $a_0 = \ell \Rightarrow a_1 = g(\ell) = \ell \Rightarrow \dots \Rightarrow a_n = \ell$.

- 2) **Affirmation:** $a_n - \ell = q^n(a_0 - \ell)$.

Preuve. Récurrence sur $n \geq 0$. Init: $n = 0$, on a $a_0 - \ell = q^0(a_0 - \ell)$. Pas de récurrence: $a_{n+1} - \ell = g(a_n) - g(\ell) = qa_n + b - (q\ell + b) = q(a_n - \ell) \stackrel{H.rec}{=} qq^n(a_0 - \ell) = q^{n+1}(a_0 - \ell)$. $\square$

Comme $|q| < 1$, on a $|a_n - \ell| = |q|^n |a_0 - \ell| \longrightarrow 0$ car c'est une suite géométrique de raison $r = |q| < 1$.

- 3) Comme au 3), $a_n - \ell = q^n(a_0 - \ell)$ donc $|a_n - \ell| = |a_0 - \ell||q|^n$ est une suite géométrique de raison $r > 1$, donc $|a_n - \ell| \longrightarrow \infty$. Or si (a_n) convergeait, a_n serait bornée (disons $|a_n| \leq M$), et on aurait $|a_n - \ell| \leq |a_n| + |\ell| \leq M + |\ell|$, en contradiction avec ce qui précède. $\square$

Illustration visuelle du théorème: vue en classe.

Exemple non linéaire: $a_0 = 1, a_{n+1} = 5 + \frac{6}{a_n} = g(a_n)$ avec $g(x) = 5 + \frac{6}{x}$.

- 1) *Candidats pour ℓ : solutions de $x = g(x)$.* On résout $x = 5 + \frac{6}{x} \Leftrightarrow x^2 - 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \ell = 6$ ou -1 .
- 2) *Exclure tous les cas sauf 1.* On observe que $a_0 = 1, a_1 = 5 + 6, a_2 = 5 + \frac{6}{11}, a_3 = 5 + *, a_4 = 5 + * \dots$

Affirmation: $a_n \geq 5$ dès que $n \geq 1$.

Preuve. Récurrence! Init: OK. Pas de récurrence: $a_{n+1} = 5 + \underbrace{6/a_n}_{\geq 0} \geq 5$. $\square$

Donc $\ell = -1$ est impossible.

- 3) *(Essayer de) montrer par récurrence que $|a_n - \ell| \leq \dots \Rightarrow |a_n - \ell| \longrightarrow 0$, ou que $|a_n - \ell| \geq \dots \Rightarrow (a_n)$ diverge.*

Affirmation: Pour tout $n \geq 0$, on a $|a_n - 6| \leq \frac{1}{5^n} |a_0 - 6|$.

Preuve. Init: $n = 0$: $|a_0 - 6| = \frac{1}{5^0} |a_0 - 6|$. Pas de récurrence: On a

$$|a_{n+1} - 6| = |g(a_n) - 6| = \left| \frac{6}{a_n} - 1 \right| = \frac{|a_n - 6|}{|a_n|} \leq \frac{1}{5} |a_n - 6| \stackrel{H.rec}{\leq} \frac{1}{5} \frac{1}{5^n} |a_0 - 6|. \quad \square$$

Ainsi $|a_n - 6| \leq \frac{1}{5^n} |a_0 - 6| \longrightarrow 0$ (suite géométrique de raison $r = \frac{1}{5} < 1$), d'où $a_n \longrightarrow 6$.

Critère de Cauchy:

Définition 2.11. Une suite (a_n) est **de Cauchy** si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall m, n \geq N$, on a $|a_m - a_n| \leq \varepsilon$.

Avec des mots: ses termes deviennent *arbitrairement proches les uns des autres*, lorsque les indices sont assez grands.

Théorème 2.13 (Convergente $\Leftrightarrow$ de Cauchy). *Une suite (a_n) converge si et seulement si elle est de Cauchy.*

Exemple: Pour $b < c$, on définit la suite a_n par $a_0 = b, a_1 = c$ et $a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{2}$. Soit alors $\varepsilon > 0$, et soit N tel que $2^N \geq \frac{c-b}{\varepsilon}$. On remarque (image vue en cours) que dès que $m, n \geq N$, a_m et a_n appartiennent au même intervalle de longueur $\frac{c-b}{2^N}$. Ainsi

$$|a_m - a_n| \leq \frac{c-b}{2^N} \leq \varepsilon \quad (\text{car } 2^N \geq \frac{c-b}{\varepsilon}).$$

Donc (a_n) est de Cauchy $\Rightarrow (a_n)$ converge !

Pour démontrer le critère de Cauchy, on a besoin de:

Théorème 2.14 (Bolzano-Weierstrass). *Toute suite bornée possède une sous-suite convergente.*

Rappel: Une **sous-suite** d'une suite (a_n) est une suite de la forme $(a_{f(n)})$ pour une fonction $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante ($f(n) < f(n+1)$).

Exemple: $a_n = (-1)^n$ est une suite bornée, mais divergente (elle ne converge pas). En revanche les sous-suites $a_{2n} = (-1)^{2n} = 1$ et $a_{2n+1} = -1$ sont constantes, donc convergentes !

Preuve du théorème de Bolzano-Weierstrass. Comme (a_n) est bornée, il existe $M > 0$ tel que $|a_n| \leq M \Leftrightarrow a_n \in [-M, M]$ pour tout n . On sépare $[-M, M]$ en $I_1 = [-M, 0]$ et $J_1 = [0, M]$, et on remarque que soit I_1 soit J_1 contient a_n pour une infinité de n ; disons J_1 . On choisit $f(1)$ tel que $a_{f(1)} \in J_1$. On sépare alors J_1 en deux intervalles I_2, J_2 , et à nouveau, soit I_2 , soit J_2 contient a_n pour une infinité de n ; disons J_2 . On choisit alors $f(2)$ tel que $f(2) > f(1)$ et $a_{f(2)} \in J_2$. On continue ainsi et on trouve une fonction strictement croissante $f(n)$ telle que $a_{f(n)}$ se trouve dans un intervalle J_n de taille de plus en plus petite.

Si on note $J_n = [b_n, c_n]$, on remarque alors que (b_n) est une suite croissante et majorée, que (c_n) est décroissante et minorée, et que (b_n) et (c_n) convergent vers la même limite ℓ par construction. Comme $b_n \leq a_{f(n)} \leq c_n$, on a $a_{f(n)} \longrightarrow \ell$ par le théorème des deux gendarmes. $\square$

Preuve du critère de Cauchy. Pour $\Rightarrow$, soit (a_n) une suite telle que $a_n \rightarrow a$; on doit montrer que (a_n) est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$, et N tel que pour tout $n \geq N$, on a $|a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Alors, dès que $m, n \geq N$, on a

$$|a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

Comme ε était arbitraire, cela montre que (a_n) est de Cauchy.

Pour $\Leftarrow$, on commence par montrer que la suite est bornée. Soit $\varepsilon = 1$ et N tel que pour tous $m, n \geq N$, on a $|a_m - a_n| \leq \varepsilon = 1$. Alors, $a_n \in [a_N - 1, a_N + 1]$ dès que $n \geq N$, et ainsi

$$|a_n| \leq M = \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\},$$

(a_n) est donc bornée. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous suite $a_{f(n)}$ qui converge, disons vers a . Soit alors $\varepsilon > 0$, N tel que $\forall m, n \geq N$, on a $|a_m - a_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et n' tel que $|a_{f(n')} - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $m = f(n') \geq N$. Alors dès que $n \geq N$ on a

$$|a_n - a| = |a_n - a_m + a_{f(n')} - a| \leq |a_n - a_m| + |a_{f(n')} - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

Comme ε était arbitraire, cela montre que $a_n \rightarrow a$. □

Chapitre 3: Séries

1 Définition et exemples

Rappel de notation: $\sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

Définition 3.1. Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite.

- La **série de terme général** (a_k) est $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k$.
- $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ est la **n -ième somme partielle**. On a donc $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.
- La série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ **converge** si la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ converge $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ existe $\in \mathbb{R}$. Elle **diverge** si elle ne converge pas.

Exemples:

- 1) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$. Le terme général est $a_k = \frac{1}{2^k}$, et la n -ième somme partielle est $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}$.

Cette série converge: En effet

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right) + 1 = \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \underbrace{\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}_{\rightarrow 0} \rightarrow 2. \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'exercice $x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1 = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ si $x \neq 1$. Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2 \text{ et donc } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2.$$

- 2) **Série géométrique:** $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$, pour $r \in \mathbb{R}$. Cette série converge si $|r| < 1$ et diverge si $|r| \geq 1$ (Exercice).

- 3) La série $\sum_{k=0}^{\infty} 1$, de terme $a_k = 1$, et somme partielle $S_n = \sum_{k=0}^n 1 = n + 1$, diverge:

On a $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n + 1 = +\infty \notin \mathbb{R}$. Même chose pour la série $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ de terme $a_k = (-1)^k$: La suite des sommes partielles (S_n) diverge, donc la série aussi.

Proposition 3.1 (Série convergente $\Rightarrow$ terme $\rightarrow 0$). Si la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge, alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0.$$

Preuve. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge $\Leftrightarrow (S_n)$ converge $\Leftrightarrow (S_n)$ est de Cauchy. Donc

$$|S_n - S_{n-1}| \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \left| \sum_{k=0}^n a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \right| = |a_n| \rightarrow 0. \quad \square$$

Attention: L'autre direction $\Leftarrow$ n'est pas vraie en général !

4) **Série harmonique:** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$. Le terme général est $a_k = \frac{1}{k}$. On a $a_k \rightarrow 0$, et pourtant cette série diverge !

Preuve informelle. Vue en classe. $\square$

Preuve formelle. On a, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$|S_{2^{m+1}} - S_{2^m}| = \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{2^{m+1}} = \frac{1}{2^{m+1}} (2^{m+1} - 2^m) = \frac{2^m}{2^{m+1}} (2-1) = \frac{1}{2}.$$

Donc (S_n) n'est pas de Cauchy $\Rightarrow (S_n)$ (et donc aussi la série) divergent. $\square$

2 Critères de convergence pour les séries

Suite des exemples:

5) **Série harmonique alternée:** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$. Cette série converge (vers $-\log(2)$, cf plus tard). Pour cela on a besoin de:

Proposition 3.2 (Critère de Leibnitz pour les séries alternées). Si

- 1) $|a_{k+1}| \leq |a_k|$ (pour k assez grand),
- 2) $\text{signe}(a_{k+1}) = -\text{signe}(a_k)$ (les signes alternent),
- 3) $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$,

alors $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge.

Idee de la preuve. Si $m > n$, $a_{n+1} \geq 0$ et $m - n$ est pair, alors

$$S_m - S_n = \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0} + \overbrace{a_{n+2} + a_{n+3}}^{\leq 0} + \underbrace{a_{n+4} + a_{n+5}}_{\geq 0} + \cdots + \overbrace{a_{m-2} + a_{m-1}}^{\leq 0} + \underbrace{a_m}_{\geq 0}$$

où les ≥ 0 et ≤ 0 proviennent du fait que les termes sont de plus en plus petits en valeur absolue, et que les signes alternent. Ainsi, $0 \leq S_m - S_n \leq a_{n+1}$, et en traitant les autres cas ($a_{n+1} \leq 0, m - n$ impair), on trouve

$$0 \leq |S_m - S_n| \leq |a_{n+1}| \longrightarrow 0.$$

Il suit que (S_n) est de Cauchy, donc elle converge (et la série aussi). $\square$

Retour à l'exemple 5: La série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ est de terme général $a_k = \frac{(-1)^k}{k}$. On a

$$1) |a_{k+1}| = \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k} = |a_k|,$$

$$2) \text{signe}(a_{k+1}) = -\text{signe}(a_k),$$

$$3) \lim_{k \rightarrow \infty} |a_k| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0. \text{ Donc la série converge.}$$

$$6) \text{ La série } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots \text{ converge. (Et vaut } \dots \frac{\pi^2}{6}!).$$

Preuve. En séparant les termes pairs et impairs, on trouve

$$\begin{aligned} S_n &\leq S_{2n+1} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} + \frac{1}{(2n+1)^2} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k+1)^2} \leq 1 + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^2} = 1 + \frac{2}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \\ &\leq 1 + \frac{1}{2} S_n. \end{aligned}$$

Ainsi, on a $S_n \leq 1 + \frac{1}{2} S_n \Rightarrow \frac{1}{2} S_n \leq 1 \Rightarrow S_n \leq 2$. La suite (S_n) est donc majorée et croissante, donc elle converge (tout comme la série). $\square$

Que dire alors des séries $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}, \dots$?

Proposition 3.3 (Critère de comparaison, terme ≥ 0). *Soient $(a_k), (b_k)$ deux suites telles que $0 \leq a_k \leq b_k$ (pour k assez grand). Alors*

$$1) \sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ converge} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ converge.}$$

$$2) \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ diverge} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ diverge.}$$

Preuve. On pose $S_n^a = \sum_{k=0}^n a_k$ et $S_n^b = \sum_{k=0}^n b_k$.

1) (S_n^a) est croissante, et $S_n^a \leq S_n^b$ qui converge $\Rightarrow$ bornée. Donc S_n^a converge, par croissance majorée.

2) (S_n^a) est croissante et divergente, donc pas bornée, d'où $S_n^a \longrightarrow +\infty$. Ainsi $S_n^b \longrightarrow +\infty$ par le théorème du gendarme seul. $\square$

Conséquence: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ converge par comparaison. En effet, $0 \leq \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{k^2}$ et la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge. En fait pour $p \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ converge si $p > 1$ et diverge si $p \leq 1$ (Exercice).

Définition 3.2. Une série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ est **absolument convergente** si la série $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ converge.

Proposition 3.4. *Toute série absolument convergente est convergente.*

Preuve. Soit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ une série absolument convergente. On note S_n ses sommes partielles, et S_n^{abs} les sommes partielles de $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$. Alors,

$$|S_m - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |a_k| = |S_m^{abs} - S_n^{abs}| \rightarrow 0$$

car (S_m^{abs}) converge, et est donc de Cauchy. Donc (S_n) est aussi de Cauchy, et converge. $\square$

Remarque 3.1. • Si $a_k \geq 0$, alors $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ est convergente $\Leftrightarrow$ absolument convergente.
 • $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ est convergente, mais pas absolument convergente: $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge (série harmonique).

Deux autres critères:

Proposition 3.5 (Critère de d'Alembert pour les séries). *Soit (a_k) une suite telle que $\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$ existe dans $\mathbb{R}$. Alors $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge absolument (donc converge) si $\rho < 1$ et diverge si $\rho > 1$.*

Remarque 3.2. • Attention: le critère ne se prononce pas si $\rho = 1$.

• Version plus générale: La série converge absolument si $\limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$ et diverge si $\liminf_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1$

Proposition 3.6 (Critère de Cauchy / de la racine). *Soit (a_k) une suite telle que $\sigma = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ existe dans $\mathbb{R}$. Alors $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge absolument (donc converge) si $\sigma < 1$ et diverge si $\sigma > 1$.*

Remarque 3.3. • Attention: le critère ne se prononce pas si $\sigma = 1$.

- Version plus générale: On remplace σ par $\sigma = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$.

Preuve de d'Alembert. Si $\rho > 1$, la suite (a_k) diverge (critère de d'Alembert pour les suites), donc $a_k \not\rightarrow 0$, et la série diverge. Si $\rho < 1$, on a $|a_k| \leq ar^k$ avec $r < 1$ (cf preuve du critère de d'Alembert pour les suites). Donc

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \leq a \sum_{k=0}^{\infty} r^k = a \frac{1}{1-r} \Rightarrow \text{convergence absolue (par comparaison)}. \quad \square$$

Preuve de Cauchy. Si $\sigma > 1$, alors $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$ pour k assez grand. D'où $|a_k| \geq 1$ et $a_k \not\rightarrow 0$, donc la série diverge. Si $\sigma < 1$, alors $\sqrt[k]{|a_k|} \leq s < 1$ pour k assez grand. D'où $|a_k| \leq s^k$ et

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} s^k = \frac{1}{1-s} \Rightarrow \text{convergence absolue (par comparaison)}. \quad \square$$

3 Séries avec paramètre

Ce sont des séries où le terme général $a_k = f_k(x)$ dépend d'un paramètre $x \in \mathbb{R}$. La convergence dépend donc aussi de $x \in \mathbb{R}$!

Exemples:

- 1) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{x^k}$ (pour $x \in \mathbb{R}^*$). Le terme général est $a_k = \frac{k^2}{x^k}$. On utilise le critère de d'Alembert:

$$\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)^2 |x|^k}{|x|^{k+1} k^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k+1}{k} \right)^2 \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x|^k}{|x|^{k+1}} = \frac{1}{|x|}.$$

Donc la série converge absolument si $\rho < 1 \Leftrightarrow |x| > 1$ et diverge si $\rho > 1 \Leftrightarrow |x| < 1$. Et si $|x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$? On vérifie les deux cas individuellement:

Si $x = 1$, on a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{1^k} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2$ diverge, car $k^2 \not\rightarrow 0$, et si $x = -1$, on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{(-1)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k k^2 \text{ diverge, car } (-1)^k k^2 \not\rightarrow 0. \text{ En résumé, la série converge } \Leftrightarrow |x| > 1.$$

Définition 3.3. Le **domaine de convergence** d'une série à paramètre x est

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{la série converge}\}.$$

$$\text{On a donc } D \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{x^k} \right) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 1\} =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[.$$

- 2) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ (pour $x \in \mathbb{R}$). Si $x = 0$, la série vaut $0^0 + 0 = 1$ (et converge donc). Si $x \neq 0$, on utilise d'Alembert:

$$\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x|^{k+1} k!}{(k+1)! |x|^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x|}{k+1} = 0.$$

La série converge donc absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$, et donc $D = \mathbb{R}$. On verra plus tard que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$.

Définition 3.4. Une **série entière** est une série de la forme $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-a)^k$, pour $x \in \mathbb{R}$. Le nombre a est le **centre** de la série.

Exemple: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(x-0)^k$ est une série entière de centre 0. Par contre, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{x^k}$ n'en est pas une.

Convergence des séries entières: On applique le critère de Cauchy généralisé (le terme est $a_k = b_k(x-a)^k$) pour trouver

$$\sigma = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|b_k|} \cdot |x-a|.$$

Ainsi, la série entière converge absolument si

$$\sigma = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|b_k|} \cdot |x-a| < 1 \Leftrightarrow |x-a| < \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|b_k|}} \stackrel{\text{def}}{=} r$$

et diverge si $|x-a| > r$.

Définition 3.5. Pour une série entière $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-a)^k$, le nombre $r = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|b_k|}}$ s'appelle le **rayon de convergence** de la série.

Remarque 3.4. • On a $r = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|b_k|}} = \lim_{k \rightarrow \infty} |b_k|^{-1/k}$ si ces limites existent.

- La série converge absolument si $|x-a| < r \Leftrightarrow x \in]a-r, a+r[$, et diverge si $|x-a| > r$. Ce r est donc l'*unique* nombre tel que

$$D \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-a)^k \right) =]a-r, a+r[\quad \cup \quad \text{éventuellement } \{a-r\} \text{ et/ou } \{a+r\}.$$

Exemple: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-3)^k}{k \cdot 2^k}$. C'est une série entière avec $b_k = \frac{1}{k \cdot 2^k}$. On calcule

$$r = \lim_{k \rightarrow \infty} |b_k|^{-1/k} = \lim_{k \rightarrow \infty} (k2^k)^{1/k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k} \cdot 2 = 2$$

(ou l'on a utilisé le fait que $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k} = 1$, vu en exercices). Donc la série converge absolument si $|x-3| < 2 \Leftrightarrow x \in]1, 5[$ et diverge si $|x-3| > 2$. Ainsi, $D \supseteq]1, 5[$, et il

faut encore vérifier les cas $x = 1$ et $x = 5$. Pour $x = 5$, on trouve $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(5-3)^k}{k \cdot 2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

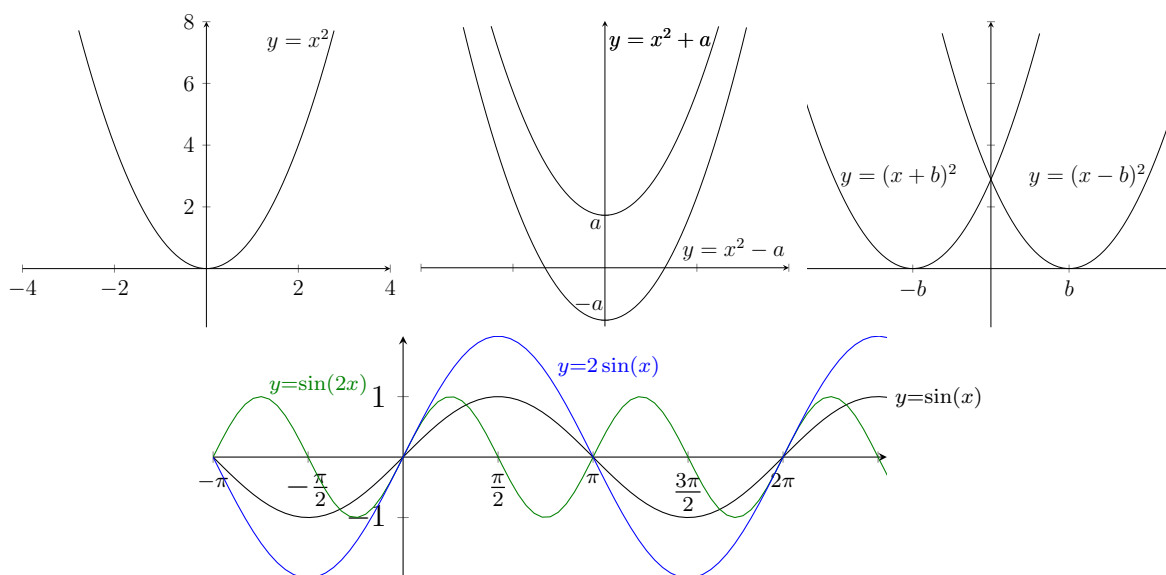
qui diverge (série harmonique), et pour $x = 1$, on a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-3)^k}{k \cdot 2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ qui converge (série harmonique alternée). Donc $D = [1, 5[$.

Remarque 3.5. Le cas $r = +\infty$ est aussi possible, lorsque la série converge pour tout $x \in \mathbb{R} =]-\infty, \infty[$.

Chapitre 4: Fonctions

1 Rappels

Fonction réelle = $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ où $D \subseteq \mathbb{R}$. $D = D(f) = \text{domaine} = \{x \mid f(x) \text{ est défini}\}$, $\text{Im}(f) = \text{image} = f(D)$. Le graphe d'une fonction est $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$. Exemples:



Propriétés: Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle.

- 1) f est **croissante** (resp. strictement croissante, décroissante, strictement décroissante) sur D si pour tous $x_1, x_2 \in D$ tels que $x_1 < x_2$, on a $f(x_1) \leq f(x_2)$ (resp. $f(x_1) < f(x_2)$, $f(x_1) \geq f(x_2)$, $f(x_1) > f(x_2)$). f est monotone (resp. strictement monotone) sur D si elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante) sur D .
- 2) f est **paire** (resp. impaire) si D est symétrique en 0 (i.e. $x \in D \Rightarrow -x \in D$) et $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$). Exemple: x^2 est paire, x^3 est impaire.
- 3) f est **T -périodique** pour un $T > 0$ si $f(x + T) = f(x)$ pour tout $x \in D$. La **période fondamentale** est le plus petit T tel que f soit T -périodique (s'il existe). Exemple: $\sin(x)$ et $\tan(x)$ sont 2π -périodiques, mais $\tan(x)$ est aussi π -périodique. Les périodes fondamentales sont 2π pour $\sin$ et π pour $\tan$.
- 4) f est **majorée** (resp. minorée, bornée) sur $A \subseteq D$ si l'ensemble $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} \subseteq \mathbb{R}$ est majoré (resp. minoré, borné). On a

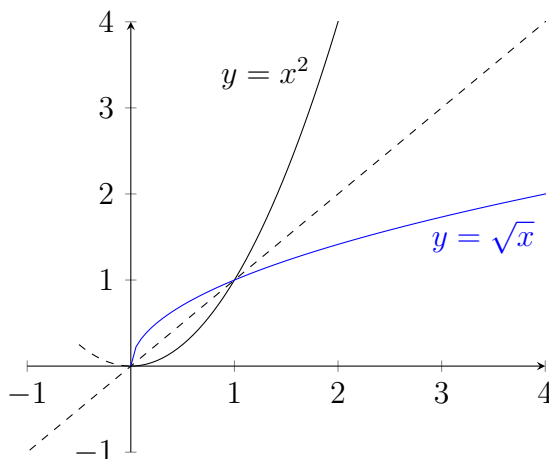
$$\sup_{x \in A} f(x) = \sup f(A), \quad \inf_{x \in A} f(x) = \inf f(A)$$

et

$$\max_{x \in A} f(x) = \max f(A), \quad \min_{x \in A} f(x) = \min f(A)$$

lorsque ces quantités existent. Ex: $f(x) = (x-1)^2 + 2$, $A =]-1, 4[$. On a $\inf_{x \in A} f(x) = 2 = \min_{x \in A} f(x)$, $\sup_{x \in A} f(x) = 11$, $\max_{x \in A} f(x)$ n'existe pas.

- 5) On rappelle que $f: X \rightarrow Y$ est surjective (resp. injective, bijective) si tout $y \in Y$ a au moins (resp. au plus, exactement) une pré-image $x \in X$ tel que $y = f(x)$. Si f est bijective, sa réciproque est la fonction $f^{-1}: Y \rightarrow X$ définie par $f^{-1}(y) =$ unique $x \in X$ tel que $f(x) = y$. On a donc $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$; il suit que son graphe s'obtient par symétrie de $f(x)$ en la droite $y = x$. Exemple:

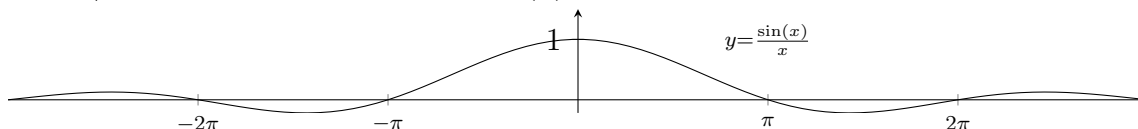


- 6) La **composée** de deux fonctions $f: X \rightarrow Y$ et $g: Y \rightarrow Z$ est la fonction $g \circ f: X \rightarrow Z$. Exemple: $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}}$ est la composée $f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ f_4(x)$ avec $f_4(x) = x^2$, $f_3(x) = x+1$, $f_2(x) = \sqrt[3]{x}$, $f_1(x) = \frac{1}{x}$.

Remarque 4.1. g est la réciproque de $f \Leftrightarrow f \circ g(x) = x$ et $g \circ f(x) = x$.

2 Limites de fonctions

Exemple: $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. On a $D(f) = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Que se passe-t-il en 0 ? Rien ! En effet: $0 \notin D$. Par contre on dirait que $f(x) \rightarrow 1$ lorsque $x \rightarrow 0$. Graphe:



Idée: Formaliser ça. On aimerait dire $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ell$. Ingrédients:

- 1) $f(x)$ doit être définie "un peu autour" de x_0 , et
- 2) f doit s'approcher de ℓ lorsque x s'approche de x_0 .

Définition 4.1. Une fonction $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ est **définie au voisinage** de $x_0 \in \mathbb{R}$ si $]x_0 - d, x_0[\cup]x_0, x_0 + d[\subseteq D(f)$ pour un $d > 0$.

Exemple: $\frac{\sin(x)}{x}$ est définie au voisinage de 0 (on peut choisir n'importe quel $d > 0$), même si elle n'est pas définie en 0!

Définition 4.2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0 . Alors f **admet** $\ell \in \mathbb{R}$ **pour limite lorsque x tend vers x_0** , noté

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell,$$

si $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in D \setminus \{x_0\}$ on a $|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.

Avec des mots: $f(x)$ est *arbitrairement proche* de ℓ dès que x est *assez proche* de x_0 (mais $\neq x_0$). Comparaison avec les suites: $a_n \rightarrow a$ si a_n est *arbitrairement proche* de ℓ dès que n est *assez grand* (donc *assez proche* de l'infini).

Remarque 4.2. • On va montrer plus tard que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

- Pour $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, on ne regarde jamais $f(x_0)$, mais seulement $f(x)$ pour x proche de x_0 . Exemple:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 132 & \text{si } x = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \stackrel{x \neq 0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1,$$

malgré le fait que $g(0) = 132 \neq 1$.

- $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{x}$ n'a pas de sens: $\sqrt{x}$ n'est pas défini au voisinage de -1 .

Exemple: Soit $f(x) = 5x - 1$, et $x_0 = 2$. Montrons "à la main" que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 9$.

- 1) $D(f) = \mathbb{R}$, donc f est bien définie au voisinage de 2.
- 2) Soit $\varepsilon > 0$. On doit trouver $\delta > 0$ tel que, dès que $|x - 2| \leq \delta$ (et $x \neq 2$), on a $|f(x) - 9| \leq \varepsilon$. On pose $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$. Alors, pour $x \neq 2$ tel que $|x - 2| \leq \delta$, on a

$$|f(x) - 9| = |5x - 10| = 5|x - 2| \leq 5\delta \leq \varepsilon \quad \text{car } \delta = \frac{\varepsilon}{5}.$$

Comme $\varepsilon > 0$ était arbitraire, on a montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta (= \varepsilon/5)$ tel que si $x \neq 2$ et $|x - 2| \leq \delta$, on a $|f(x) - 9| \leq \varepsilon$. Donc $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 9$.

Heureusement, les suites viennent en aide pour simplifier les calculs:

Théorème 4.1 (Limites de fonctions et suites). Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \ell$ pour **toute** suite $(a_n) \subseteq D(f) \setminus \{x_0\}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$.

Idée: $a_n \rightarrow x_0$ = manière de s'approcher de x_0 . Donc $f(x) \rightarrow \ell$ si $f(a_n) \rightarrow \ell$ pour toute les façons de s'approcher de x_0 .

Preuve. Pour $\Rightarrow$, supposons que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$. Soit $(a_n) \subseteq D(f) \setminus \{x_0\}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$. On doit montrer: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \ell$. Soit $\varepsilon > 0$.

1) $\exists \delta > 0$ tel que $|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ (def de $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$).

2) $\exists N$ tel que $\forall n \geq N$, on a $|a_n - x_0| \leq \delta$. (def de $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$).

Donc dès que $n \geq N$, on a (en posant $x = a_n$): $|f(a_n) - \ell| = |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$, car $|x - x_0| = |a_n - x_0| \leq \delta$. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \ell$.

Pour $\Leftarrow$, supposons par l'absurde que l'on n'ait pas $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall \delta > 0, \exists x \in D \setminus \{x_0\}$ avec $|x - x_0| \leq \delta$ et $|f(x) - \ell| \geq \varepsilon$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\delta = \frac{1}{n}$ et on trouve donc a_n tel que $|a_n - x_0| \leq \frac{1}{n}$ mais $|f(a_n) - \ell| \geq \varepsilon$. On a donc une suite $(a_n) \subseteq D \setminus \{x_0\}$ avec $0 \leq |a_n - x_0| \leq \frac{1}{n}$. Ainsi $a_n \rightarrow x_0$, et donc par hypothèse, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \ell$. Or $|f(a_n) - \ell| \geq \varepsilon > 0$ pour tout n , ce qui est absurde. $\square$

Attention: "Toute suite" est important !

Corollaire 4.2. Si

- $\exists (a_n) \subseteq D \setminus \{x_0\}$ tel que $a_n \rightarrow x_0$ mais $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$ n'existe pas, ou
 - $\exists (a_n), (b_n) \subseteq D \setminus \{x_0\}$ tel que $a_n \rightarrow x_0$ et $b_n \rightarrow x_0$ mais $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$,
- alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ n'existe pas.

Exemple: $f(x) = \cos(\frac{1}{x})$. On a $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, donc f est définie au voisinage de 0. On pose $a_n = \frac{1}{2n\pi}$ et $b_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$, de sorte que $a_n \rightarrow 0$ et $b_n \rightarrow 0$. Mais $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(2\pi n) = 1$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(2\pi n + \pi) = -1$. Donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ n'existe pas. (Autre suite vue en cours.)

Propriétés des limites de fonctions. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies au voisinage de x_0 et telles que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ existent. Alors

- 1) Pour tous $p, q \in \mathbb{R}$, on a $\lim_{x \rightarrow x_0} pf(x) + qg(x) = p \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + q \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.
- 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right) \left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right)$.
- 3) Si $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$, alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$.
- 4) Si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de x_0 , alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.
- 5) Si $h: D \rightarrow \mathbb{R}$ est tel que $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ au voisinage de x_0 et que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$, alors $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \ell$.

Preuve. Utiliser les suites (point 1) fait en cours). $\square$

Remarque 4.3. En utilisant les suites, on peut également montrer que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_2$ alors $\ell_1 = \ell_2$ (unicité de la limite).

3 Calculs de limites

0) $\lim_{x \rightarrow u} c = c$, $\lim_{x \rightarrow u} x = u$. En effet, si $f(x) = c$ et $g(x) = x$, alors pour toute suite $a_n \rightarrow u$, on a $f(a_n) = c \rightarrow c$ et $g(a_n) = a_n \rightarrow u$. Donc $\lim_{x \rightarrow u} f(x) = c$ et $\lim_{x \rightarrow u} g(x) = u$.

1) Polynômes: $\lim_{x \rightarrow u} x^2 = \left(\lim_{x \rightarrow u} x\right)^2 = u^2$ par le produit des limites. Par récurrence, on trouve $\lim_{x \rightarrow u} x^n = u^n$, et en utilisant la linéarité, on voit que si $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, alors $\lim_{x \rightarrow u} P(x) = P(u)$.

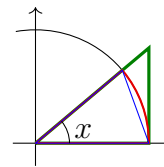
2) Fonctions rationnelles: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ avec P, Q des polynômes. Si $Q(u) \neq 0$, on a $\lim_{x \rightarrow u} Q(x) = Q(u) \neq 0$, et on peut appliquer la propriété du quotient des limites

pour trouver $\lim_{x \rightarrow u} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow u} P(x)}{\lim_{x \rightarrow u} Q(x)} = \frac{P(u)}{Q(u)}$. Exemple: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{3x^2+4} = \frac{1}{16}$.

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1$. En calculant les aires des fi-

gures colorées ci-contre, on trouve que $\frac{\sin(x)}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan(x)}{2}$. En

divisant par $x/2$, on trouve $\frac{\sin(x)}{x} \leq 1 \leq \frac{\sin(x)}{x} \frac{1}{\cos(x)}$. En mul-



tipliant l'inégalité de droite par $\cos(x)$, on trouve $\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x}$.

Finalement, comme $\cos(x) \in [0, 1]$, on a $\cos(x) \leq \cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) \leq 1 - x^2$.

On obtient alors la chaîne d'inégalités $1 - x^2 \leq \cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$, ce qui montre

que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \cos(x)$ par le théorème des deux gendarmes.

Remarque 4.4. Cette dernière chaîne d'inégalités est vraie pour $0 < x < \pi/2$, donc aussi pour $-\pi/2 < x < 0$ car ce sont des fonctions paires.

Proposition 4.3 (Limites de composées). Soient $f: A \rightarrow B$ et $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, 2) $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$ et 3) $f(x) \neq b$ au voisinage de a .

Alors $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow b} g(y) = c$.

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $\delta_1 > 0$ tel que $|g(y) - c| \leq \varepsilon$ dès que $y \neq b$ et $|y - b| \leq \delta_1$, et $\delta > 0$ tel que $f(x) \neq b$ et $|f(x) - b| \leq \delta_1$ dès que $x \neq a$ et $|x - a| \leq \delta$. Alors, pour $|x - a| \leq \delta$, on a $|g(f(x)) - c| = |g(y) - c| \leq \varepsilon$, où l'on a posé $y = f(x)$ dans la première égalité, et où l'inégalité suit du fait que $y = f(x) \neq b$ et $|y - b| = |f(x) - b| \leq \delta_1$. $\square$

Exemples:

- $\lim_{x \rightarrow 1} \cos(x^{12} - 1) = \lim_{x \rightarrow 1} g(f(x))$ où $g(x) = \cos(x)$ et $f(x) = x^{12} - 1$. On a 1) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^{12} - 1) = 0$, 2) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1$, et 3) $x^{12} - 1 \neq 0$ dès

que $x \neq \pm 1$, donc $x^{12} - 1 \neq 0$ au voisinage de 1. Ainsi $\lim_{x \rightarrow 1} \cos(x^{12} - 1) \stackrel{y=x^{12}-1}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \cos(y) = 1$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(x)}{3x^2 + \sin^2(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)/x^2}{(3x^2 + \sin^2(x))/x^2} = \frac{\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2}{3 + \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y}{3 + y} = \frac{1}{4}, \text{ où}$$

l'on a fait le changement de variables $y = \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2$; on a $y \rightarrow 1$ lorsque $x \rightarrow 0$.

- Attention: La condition 3) est importante (dans la proposition). Exemple vu en classe.

Proposition 4.4 (Limites de réciproques). *Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ strictement monotone. Soit $u \in [a, b]$ et $v = f(u)$. Alors $f: [a, b] \rightarrow \text{Im}(f)$ est bijective, et si $f^{-1}: \text{Im}(f) \rightarrow [a, b]$ est définie au voisinage de v , on a $\lim_{x \rightarrow v} f^{-1}(x) = f^{-1}(v) = u$.*

Idée de la preuve. Vue en classe. □

Corollaire 4.5. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $v \geq 0$, on a $\lim_{x \rightarrow v} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{v}$.*

Preuve. On considère $f(x) = x^n$ qui est strictement croissante sur $[0, a]$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow v} f^{-1}(x) = f^{-1}(v) = \sqrt[n]{v}$ pour tout $v \geq 0$. □

4 Limites à gauche/droite, limites (vers l')infini(es)

Idée: On généralise $\lim_{x \rightarrow u} f(x) = \ell$ en 1) $\lim_{x \downarrow u}$ et $\lim_{x \uparrow u}$, 2) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty}$ et 3) $\lim f(x) = \pm\infty$.

Définition 4.3. Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage $\begin{matrix} \text{à gauche} \\ \text{à droite} \end{matrix}$ de $u \in \mathbb{R}$ (c'est à dire $\begin{matrix}]u-d, u[\subseteq D \\]u, u+d[\subseteq D \end{matrix}$ pour un $d > 0$). Alors f admet $\ell \in \mathbb{R}$ pour limite à gauche (resp. à droite) lorsque x tend vers u , si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in D \setminus \{u\}$, on a $\begin{matrix} x \in [u-\delta, u[\\ x \in]u, u+\delta] \end{matrix} \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.

Notation: $\lim_{x \uparrow u} f(x) = \lim_{x \rightarrow u^-} f(x) = \text{limite à gauche}$, $\lim_{x \downarrow u} f(x) = \lim_{x \rightarrow u^+} f(x) = \text{limite à droite}$.

Exemple: Si $f(x) = \frac{|x|}{x}$, alors $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$. Donc $\lim_{x \uparrow 0} f(x) = \lim_{x \downarrow 0} f(x) = -1$ et $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = \lim_{x \uparrow 0} f(x) = 1$.

Proposition 4.6. *Si f est définie au voisinage de u , alors $\lim_{x \rightarrow u} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \uparrow u} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \downarrow u} f(x) = \ell$.*

Preuve. Exercice. □

Remarque 4.5. Cela montre que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ n'existe pas (limites à gauche et à droite ne sont pas égales).

Définition 4.4. Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de $+\infty$ (i.e. $]a, +\infty[\subseteq D$ pour un $a \in \mathbb{R}$). Alors f admet $\ell \in \mathbb{R}$ comme limite lorsque x tend vers $+\infty$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in D$ on a $\frac{x \geq C}{x \leq C} \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.

Notation: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \ell$, ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \ell$.

Exemple: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $C = \frac{1}{\varepsilon}$. Alors dès que $x \geq C$, on a $|\frac{1}{x} - 0| = \frac{1}{x} \leq \frac{1}{C} \leq \varepsilon$.

Remarque 4.6. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow f(x)$ a une **asymptote horizontale** d'équation $y = \ell$.

Définition 4.5. Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de $u \in \mathbb{R}$. Alors $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers u , si $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in D \setminus \{u\}$ on a $|x - u| \leq \delta \Rightarrow$
 $f(x) \geq A$
 $f(x) \leq A$.

Notation: $\lim_{x \rightarrow u} f(x) = \pm\infty$, ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow u} \pm\infty$.

Exemple: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$. Soit $A \in \mathbb{R}$, et posons $\delta = \frac{1}{\sqrt{A}}$. Alors, dès que $|x - 0| \leq \delta$, on a $\frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{\delta^2} \geq A$, car $\frac{1}{\delta^2} \geq A \Leftrightarrow \delta^2 \geq \frac{1}{A}$.

Remarque 4.7. • On peut combiner 1), 2), 3): Par exemple, on a $\lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$,

$$\lim_{x \uparrow 0} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x - 1 = +\infty.$$

- $\lim_{x \rightarrow u^\pm} = \pm\infty \Leftrightarrow f(x)$ a une **asymptote verticale** d'équation $x = u$.
- 1), 2), 3) ont aussi leurs caractérisations avec des suites (exercice). De plus, les propriétés algébriques, ainsi que le théorème des deux gendarmes et des composées restent valables pour ces limites généralisées.
- Finalement, les résultats valables pour les suites ($+\infty + \infty = +\infty$, $-\infty - \infty = -\infty$, $\pm\infty + c = \pm\infty$, théorème du gendarme seul, $\infty(\pm\infty) = \pm\infty$, $\frac{c}{\pm\infty} = 0$) restent valables pour les limites infinies. Attention: $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $0 \cdot \infty$ sont toujours des formes indéterminées!

5 Fonctions continues

Définition 4.6. Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de $u \in \mathbb{R}$. Alors f est **continue en** u si $\lim_{x \rightarrow u} f(x) = f(u)$. Elle est **continue sur** D si elle est continue en tout $u \in D$.

Remarque 4.8. La formule $\lim_{x \rightarrow u} f(x) = f(u)$ implique 3 choses: 1) $u \in D$, 2) la limite existe et 3) elle vaut $f(u)$.

Exemples: Polynômes, fonctions rationnelles, $\sqrt[n]{x}$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$, $\arctan(x)$, e^x , $\log(x)$, ... sont continues sur leurs domaines (Exercice).

Remarque 4.9. Si f est continue en $u \in \mathbb{R}$, et $a_n \rightarrow u$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right) = f(u)$. Exemple: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \sin(0) = 0$.

Définition 4.7. Soit f définie au voisinage $\begin{matrix} \text{à gauche} \\ \text{à droite} \end{matrix}$ de $u \in \mathbb{R}$. Alors f est continue $\begin{matrix} \text{à gauche} \\ \text{à droite} \end{matrix}$ en $x = u$ si $\begin{matrix} \lim_{x \uparrow u} f(x) \\ \lim_{x \downarrow u} f(x) \end{matrix} = f(u)$

Remarque 4.10. f est continue en $x = u \Leftrightarrow f$ est continue à gauche et à droite en $x = u$.

Exemple: $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x < 0. \end{cases} \Rightarrow f$ continue en tout $x \neq 0$. En $x = 0$, on a

$\lim_{x \uparrow 0} f(x) = \lim_{x \uparrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = \lim_{x \downarrow 0} 2x + 1 = 1$. Donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0)$, et f est continue en $x = 0$. f est donc continue sur $\mathbb{R}$.

Opérations sur les fonctions continues: si f, g sont continues en $x = u$, alors $f + g$, $f \cdot g$, $\alpha f + \beta g$, $\frac{f}{g}$ (si $g(u) \neq 0$) sont continues en $x = u$. De plus, si f est continue en $x = u$ et g est continue en $x = f(u)$, alors $g \circ f$ est continue en $x = u$.

Exemple: $f(x) = \frac{\sin(x^2 + 8x + 1)}{\sqrt{x^2 + 5} + \cos(x)}$ est continue sur $D(f) = \mathbb{R}$.

Définition 4.8 (Prolongements par continuité). Si $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ est définie au voisinage de $u \in \mathbb{R}$, avec $u \notin D$ et est telle que $\lim_{x \rightarrow u} f(x) = \ell$, alors le **prolongement par continuité** de f en u est

$$\hat{f}: D \cup \{u\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D \\ \ell & \text{si } x = u. \end{cases}$$

Remarque 4.11. $\hat{f}: D \cup \{u\} \rightarrow \mathbb{R}$ est l'unique fonction continue telle que $\hat{f}(x) = f(x)$ si $x \neq u$, et $\hat{f}(u) = \ell$. Donc $\hat{f}$ est continue en u .

Exemple: Si $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, avec $D(f) = \mathbb{R}^*$, alors $\hat{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$ est le prolongement par continuité de f . (Cette fonction s'appelle parfois $\text{sinc}(x)$).

Contre-exemple: La fonction $f(x) = \cos(\frac{1}{x})$ n'admet pas de prolongement par continuité en $x = 0$ (car $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(\frac{1}{x})$ n'existe pas).

Fonctions continues sur $[a, b]$:

Définition 4.9 (ou Rappel). Une fonction $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est **continue (jusqu'au bord)** si

- $\lim_{x \rightarrow u} f(x) = f(u)$ pour tout $u \in]a, b[$ (f continue sur $]a, b[$),
- $\lim_{x \uparrow b} f(x) = f(b)$ (f est continue à gauche en b),
- $\lim_{x \downarrow a} f(x) = f(a)$ (f est continue à droite en a).

Théorème 4.7 (Théorème de la valeur intermédiaire). Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue (jusqu'au bord). Alors

$$f([a, b]) = \left[\inf_{x \in [a, b]} f(x), \sup_{x \in [a, b]} f(x) \right].$$

Remarque 4.12. Cela veut dire que f atteint

- son inf, donc l'inf est un min: $\inf_{x \in [a, b]} f(x) = \min_{x \in [a, b]} f(x)$,
- son sup, donc le sup est un max: $\sup_{x \in [a, b]} f(x) = \max_{x \in [a, b]} f(x)$,
- toutes les valeurs entre les deux !

De plus, $f([a, b])$ est donc un intervalle fermé.

Exemple d'application: L'équation $\cos(x) = x$ a une solution $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. En effet, on définit la fonction

$$f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) = \cos(x) - x.$$

Cette fonction est continue (jusqu'au bord), et on remarque que $f(0) = \cos(0) - 0 = 1 > 0$ et $f(\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}) - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} < 0$. Ainsi par le TVI, on a

$$f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[\underbrace{\min}_{<0}, \underbrace{\max}_{>0} \right] \ni 0 \Rightarrow \exists x_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ tel que } f(x_0) = 0.$$

Comme $f(0) \neq 0 \neq f(\frac{\pi}{2})$, $x_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$, et comme $f(x_0) = 0 \Leftrightarrow \cos(x_0) = x_0$, on a trouvé une solution de l'équation.

Preuve du Théorème de la valeur intermédiaire. 1) f atteint $s = \sup_{x \in [a, b]} f(x) = \sup \text{Im}(f)$. Par le théorème "pince à épiler", pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $y \in \text{Im}(f)$ tel que $s - \varepsilon \leq y \leq s$. On applique cela avec $\varepsilon = \frac{1}{n}$ pour trouver $y_n = f(x_n)$ tel que $s - \frac{1}{n} \leq f(x_n) \leq s$. Par le théorème des deux gendarmes, la suite $f(x_n)$ converge donc vers s . Comme $x_n \in [a, b]$, la suite (x_n) est bornée, et possède donc une sous-suite convergente $(x_{g(n)})$, disons vers $v \in [a, b]$. Ainsi,

$$f(v) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{g(n)}\right) \stackrel{f \text{ continue}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{g(n)}) \stackrel{\text{sous-suite}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = s.$$

2) f atteint son inf: similaire à 1). On trouve donc $u \in [a, b]$ tel que $f(u) = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$.

- 3) f atteint tout y tel que $f(u) < y < f(v)$. On suppose que $u < v$, le cas $u > v$ étant similaire. On pose $u_0 = u$ et $v_0 = v$, puis on définit récursivement u_{n+1} et v_{n+1} comme suit: Pour $t = \frac{u_n + v_n}{2}$, si $f(t) = y$, le processus s'arrête: on a atteint y . Si $t < y$, on pose $u_{n+1} = u_n$ et $v_{n+1} = t$, et si $t > y$, on pose $u_{n+1} = t$ et $v_{n+1} = v_n$. On trouve donc deux suites (u_n) et (v_n) , telles que
- (i) $f(u_n) \leq y \leq f(v_n)$.
 - (ii) (u_n) est croissante et majorée (par b) $\Rightarrow$ converge vers u_* .
 - (iii) (v_n) est décroissante et minorée (par a) $\Rightarrow$ converge vers v_* .
 - (iv) $v_n - u_n \leq \frac{v - u}{2^n} \rightarrow 0 \Rightarrow u_* = v_* = w$.

On a donc $y \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f(v_n) \stackrel{f \text{ cont.}}{=} f(w) \stackrel{f \text{ cont.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) \leq y$, et donc $f(w) = y$. $\square$

Corollaire 4.8. Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue (jusqu'au bord) et que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ (ou l'inverse!) alors il existe $u \in]a, b[$ tel que $f(u) = 0$.

Preuve. Voir exemple avec $\cos(x) - x$. $\square$

Corollaire 4.9. Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue (jusqu'au bord) avec $I = \text{intervalle}$ ($= [a, b]$, ou $[a, b[$, ou $] - \infty, b]$, ...) alors $\text{Im}(f) = f(I)$ est un intervalle.

Corollaire 4.10. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue (jusqu'au bord). Alors f est injective $\Leftrightarrow f$ est strictement monotone.

Preuve. Pour $\Leftarrow$, voir le vrai/faux de la série 1. Pour $\Rightarrow$, supposons que f n'est pas strictement monotone. Il existe donc $u, v, w \in [a, b]$ tels que $u < v < w$, mais $f(u) < f(v) > f(w)$ (ou la même chose en échangeant $<$ avec $>$). Soit alors $y \in]\max\{f(u), f(w)\}, f(v)[$. En appliquant le TVI à $f|_{[u, v]}$ et à $f|_{[v, w]}$, on trouve deux éléments $x_1 \in]u, v[$ et $x_2 \in]v, w[$ tels que $f(x_1) = y = f(x_2)$. Comme on a nécessairement $x_1 < x_2$, f n'est pas injective. $\square$

Chapitre 5: Dérivées

1 Définition et exemples

Idée: Calculer la pente de la tangente au graphe d'une courbe.

Définition 5.1. Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de $x_0 \in D$. Alors f est **dérivable** (ou **différentiable**) en x_0 si la limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \stackrel{\text{def}}{=} f'(x_0) \quad \text{existe} \in \mathbb{R}.$$

Notations:

- $f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \partial_x f(x_0) = D_x f(x_0) = \dot{f}(x_0) = \dots$
- $f'(x_0)$ est la **dérivée** de f en x_0 .
- f est **dérivable** si elle est dérivable en tout $x_0 \in D$.

Remarque 5.1. • $f'(x_0)$ = pente de la tangente au graphe de f , au point $(x_0, f(x_0))$.

- En faisant la substitution $x = x_0 + h$, on trouve la définition équivalente

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Définition 5.2. La **fonction dérivée** d'une fonction $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ est

$$\begin{aligned} f: D(f') &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x). \end{aligned}$$

On a $D(f') = \{x \in D \mid f \text{ est dérivable en } x\}$.

Exemples:

1) $f(x) = x^2, x_0 \in \mathbb{R}$. On a $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2hx_0 + h^2}{h} = 2x_0$.

2) $f(x) = \sin(x), x_0 \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0) \cos(h) + \cos(x_0) \sin(h) - \sin(x_0)}{h} \\ &= \sin(x_0) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x_0) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = \cos(x_0), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$ et les inégalités $1 - h^2 \leq \cos(h) \leq 1 \Rightarrow -h =$

$$\frac{1-h^2-1}{h} \leq \frac{\cos(h)-1}{h} \leq 0, \text{ d'où } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h)-1}{h} = 0, \text{ cf Chapitre 4, section 3.}$$

On montre d'une manière analogue que la dérivée de $\cos(x)$ est $-\sin(x)$.

Proposition 5.1. Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle.

- 1) Si f est dérivable en x_0 , alors f est continue en x_0 .
- 2) f dérivable en $x_0 \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) + \alpha(x - x_0) + r(x)$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $r: D \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0$.

Remarque 5.2. Avec des mots, la condition 2) est: $f(x) =$ droite + reste $r(x)$ avec $r(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$ plus vite que $x - x_0$.

Preuve. 1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) + f(x_0) = f'(x_0) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) + f(x_0) = f(x_0)$.
 2) Esquisse vue en classe. □

Remarque 5.3. f continue $\nRightarrow f$ dérivable. Exemple: Si $f(x) = |x|$, alors f est continue (partout, donc) en 0, mais on a

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{h}{h} = 1 \neq -1 = \lim_{h \uparrow 0} \frac{-h}{h} = \lim_{h \uparrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}.$$

Ainsi la limite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$ n'existe pas, et f n'est donc pas dérivable en 0.

Proposition 5.2 (Opérations algébriques sur les dérivées). Soient $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables en x_0 .

- 1) $(p \cdot f + q \cdot g)'(x_0) = pf'(x_0) + qg'(x_0)$ pour tous $p, q \in \mathbb{R}$.
- 2) $(f \cdot g)'(x_0) = (f'g + fg')(x_0)$
- 3) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(\frac{f'g - fg'}{g^2}\right)(x_0)$.

Preuve. Exercice. □

Dérivées de fonctions usuelles.

- 0) $f(x) = c \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = 0$ (la pente est nulle!)
- 1) $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Preuve. Par récurrence. Init: ($n = 1$): $f(x) = x$, d'où $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} =$

1. Pas de récurrence: Si $f(x) = x^{n+1} = xx^n$, on trouve, en utilisant la règle du produit: $f'(x) = (xx^n)' = 1 \cdot x^n + x(nx^{n-1}) = (n+1)x^n$. □

- 2) $\sin'(x) = \cos(x)$ et $\cos'(x) = -\sin(x)$. Pour $\tan(x)$, on utilise la règle du quotient pour trouver: $\tan'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$, ou bien $1 + \tan(x)$.

- 3) $f(x) = x^{-n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \neq 0$. On écrit $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ puis on utilise la règle du quotient pour trouver $f'(x) = (-n)x^{-n+1}$.

Proposition 5.3 (Dérivée de composée). Soient $f: A \rightarrow B$ et $g: B \rightarrow \mathbb{R}$, avec f dérivable en x_0 et g dérivable en $f(x_0)$. Alors $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

Preuve. On écrit $\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Le second quotient tend vers $f'(x_0)$ lorsque $x \rightarrow x_0$, et le premier vaut $\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}$ (changement de variables $y = f(x), y_0 = f(x_0)$) qui tend vers $g'(y_0)$ lorsque $x \rightarrow x_0 \Rightarrow y \rightarrow y_0$. $\square$

Exemple: $(\cos(x \sin(x)))'$. (Traité en classe.)

Proposition 5.4 (Dérivée des réciproques). Soit $f: A \rightarrow B$ bijective et dérivable sur tout $A =$ intervalle ouvert. Si $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in A$, alors $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ pour tout $x \in B$.

Preuve. On admet que f^{-1} est dérivable sur tout B . On dérive l'équation $x = f(f^{-1}(x))$ des deux côtés pour trouver $1 = f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x)$, d'où $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$. $\square$

Exemples:

- $\sqrt[n]{x} = f^{-1}(x)$ où $f(x) = x^n$. (On suppose $x > 0$). Donc $(\sqrt[n]{x})' = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n}x^{1-n} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$. On montre de manière analogue que $(x^{\frac{p}{q}})' = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}$, et on verra que $(x^u)' = ux^{u-1}$ pour tout $u \in \mathbb{R}$ (et $x > 0$).
- $\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$ pour $x \in]-1, 1[$. Comme $\alpha = \arcsin(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on a $\cos(\alpha) \geq 0$, donc $\cos(\alpha) = \sqrt{\cos^2(\alpha)} = \sqrt{1 - \sin^2(\alpha)}$ et ainsi $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1 - x^2}$. Il suit: $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Définition 5.3. $\lim_{\substack{h \downarrow 0 \\ h \uparrow 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} =$ dérivée $\begin{matrix} \text{à droite} \\ \text{à gauche} \end{matrix}$ de f en x_0 .

Proposition 5.5. f est dérivable en $x_0 \Leftrightarrow f$ est dérivable à gauche et à droite en x_0 , et les valeurs sont égales.

Exemples:

- $f(x) = |x|$. En $x = 0$, la dérivée à droite vaut 1, et la dérivée à gauche vaut -1 . Donc $f'(0)$ n'existe pas.
- $f(x) = \sqrt[3]{x}$. La dérivée n'existe pas en 0 (elle vaut $+\infty$). Détails vus en classe.

Définition 5.4. La **dérivée seconde** de f est: $f''(x) = f^{(2)}(x) = (f'(x))'$. La **dérivée d'ordre n** est $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$. Autre notation: $f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} f$.

Définition 5.5. Soit $I =]a, b[$. Alors:

$$\mathcal{D}^n(I) = \{f: I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est } n \text{ fois dérivable sur } I\}, \text{ et}$$

$$\mathcal{C}^n(I) = \{f: I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est } n \text{ fois dérivable sur } I \text{ et } f^{(n)} \text{ est continue}\}.$$

On définit également $\mathcal{C}^\infty(I) = \{f: I \rightarrow \mathbb{R} \mid f^{(n)} \text{ existe pour tout } n \in \mathbb{N}\}$.

Remarque 5.4. • On a $\mathcal{D}^0(I) = \{\text{fonctions } f: I \rightarrow \mathbb{R}\}$ et $\mathcal{C}^0(I) = \{\text{fonctions continues } f: I \rightarrow \mathbb{R}\}$.

- Comme toute fonction dérivable est continue, on a

$$\mathcal{C}^0 \supseteq \mathcal{D}^1 \supseteq \mathcal{C}^1 \supseteq \mathcal{D}^2 \supseteq \mathcal{C}^2 \supseteq \dots \supseteq \mathcal{C}^\infty.$$

Exemples:

- $\sqrt[3]{x} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et $\in \mathcal{C}^\infty(]0, +\infty[)$, mais $\notin \mathcal{D}^1(\mathbb{R})$.
- $(\mathcal{D}^1 \supsetneq \mathcal{C}^1)$. Soit $f(x) = x^2 \cos(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$, prolongée par continuité en 0 via: $f(0) = 0$. Alors $f \in \mathcal{C}^\infty(]-\infty, 0[) \cap \mathcal{C}^\infty(]0, +\infty[)$ et on calcule:

$$f'(x) = 2x \cos(\frac{1}{x}) + x^2(-\sin(x))\frac{-1}{x^2} = 2x \cos(\frac{1}{x}) + \sin(\frac{1}{x}) \text{ si } x \neq 0.$$

En $x = 0$, on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \cos(\frac{1}{h})}{h} = 0.$$

Donc f est dérivable en 0, et donc partout: $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R})$. Sa dérivée est:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cos(\frac{1}{x}) + \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

En revanche, $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin(\frac{1}{x})$ n'existe pas. Donc f' n'est pas continue en 0.

Ainsi $f \notin \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, même si $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R})$.

2 Dérivée et croissance

Théorème 5.6 (Théorème de Rolle). Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue (jusqu'au bord) et dérivable sur $]a, b[$. On suppose que $f(a) = 0 = f(b)$. Alors il existe $u \in]a, b[$ tel que $f'(u) = 0$.

Preuve. Par le TVI, f atteint $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$, qu'on suppose > 0 (si $M \leq 0$, on remplace par le min). Il existe donc $u \in]a, b[$ tel que $f(u) = M$. On a alors

$$\begin{aligned} f'(u) &= \lim_{x \downarrow u} \frac{f(x) - f(u)}{x - u} = \lim_{x \downarrow u} \frac{f(x) - M}{x - u} = \lim_{x \downarrow u} \frac{\leq 0}{\geq 0} \leq 0 \text{ et} \\ f'(u) &= \lim_{x \uparrow u} \frac{f(x) - f(u)}{x - u} = \lim_{x \uparrow u} \frac{f(x) - M}{x - u} = \lim_{x \uparrow u} \frac{\leq 0}{\leq 0} \geq 0. \end{aligned}$$

Donc $f'(u) = 0$. □

Théorème 5.7 (Théorème des accroissements finis). Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue (jusqu'au bord) et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $u \in]a, b[$ tel que $f'(u) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Preuve. Appliquer le théorème de Rolle à $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. $\square$

Applications du Théorème des Accroissements finis: Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue (jusqu'au bord) et dérivable sur $]a, b[$.

- 1) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = \text{constante}$. En effet, $\Leftarrow$ est claire, et pour $\Rightarrow$, si $f \neq \text{constante}$, on trouve $c < d$ tel que $f(c) \neq f(d)$. Le TAF donne alors $u \in]c, d[$ tel que $f'(u) = \frac{f(d) - f(c)}{d - c} \neq 0$.
- 2) Si $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et dérivable sur $]a, b[$, et si on a $f'(x) = g'(x)$, alors $f(x) = g(x) + C$. En effet, il suffit d'appliquer le 1) à $f - g$.
- 3) $\begin{matrix} f'(x) \geq 0 \\ f'(x) \leq 0 \end{matrix} \forall x \in]a, b[\Leftrightarrow f \text{ est } \begin{matrix} \text{croissante} \\ \text{décroissante} \end{matrix} \text{ sur } [a, b]$.
(Preuve de la première ligne vue en classe.)
- 4) $\begin{matrix} f'(x) > 0 \\ f'(x) < 0 \end{matrix} \forall x \in]a, b[\Rightarrow f \text{ est } \begin{matrix} \text{strictement croissante} \\ \text{strictement décroissante} \end{matrix} \text{ sur } [a, b]$.

Remarque 5.5. Attention, $\Leftarrow$ du 4) est faux en général. En effet, la fonction $f(x) = x^3$ est strictement croissante, mais $f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(0) = 0$, donc f' n'est pas > 0 sur $\mathbb{R}$.

Définition de la fonction exponentielle (et logarithme)

Théorème 5.8. Il existe une unique fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f'(x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$ et $f(0) = 1$.

Preuve. Existence: plus tard ! Unicité: 4 étapes.

- 1) Un tel f vérifie $f(x) \neq 0 \forall x \geq 0$. (Exercice).
- 2) *Unicité sur $\mathbb{R}_+$.* Si $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une autre fonction telle que $g'(x) = g(x)$ et $g(0) = 1$, alors $f(x) = g(x) \forall x \geq 0$. En effet, dès que $x \geq 0$, on a $f(x) \neq 0$, et donc on calcule $\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)' = \frac{g'f - f'g}{f^2} = \frac{gf - fg}{f^2} = 0$. Il suit que $\frac{f(x)}{g(x)} = C \Rightarrow f(x) = Cg(x)$. Mais $1 = g(0) = Cf(0) = C$, donc $g(x) = f(x)$ si $x \geq 0$.
- 3) f vérifie $f(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Sinon, il existe $u > 0$ tel que $f(-u) = 0$. On pose alors $g(x) = f(x) + f(x-u)$. On a $g'(x) = f'(x) + f'(x-u) = g(x)$, et $g(0) = f(0) + f(-u) = 1 + 0 = 1$. Par unicité sur $\mathbb{R}_+$, on a $g(x) = f(x) \forall x \geq 0$, d'où $f(x) + f(x-u) = f(x) \Leftrightarrow f(x-u) = 0 \forall x \geq 0$. Mais en posant $x = u > 0$, on trouve alors $1 = f(u-u) = 0$, une contradiction.
- 4) *Unicité sur $\mathbb{R}$:* On procède exactement comme au 2). $\square$

Définition 5.6. Cette fonction s'appelle la **fonction exponentielle**, notée $\exp(x)$ (et e^x plus tard).

Propriétés de $\exp(x)$

- 1) $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(0) = 1$ (découle de la définition). Donc $\exp \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \exp \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ (donc continue !) Mais comme $\exp = \exp' = \exp'' = \dots = \exp^{(n)}$, on a $\exp \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
- 2) $\exp(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (cf preuve !)

- 3) $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En effet, $\exp$ est continue et $\neq 0$, donc > 0 ou < 0 . Comme $\exp(0) = 1$, on a $\exp'(x) = \exp(x) > 0$.
- 4) $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. En effet, fixons $y \in \mathbb{R}$ et posons $g(x) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(y)}$. Alors $g'(x) = \frac{\exp'(x+y)}{\exp(y)} = g(x)$ et $g(0) = \frac{\exp(y)}{\exp(y)} = 1$. Par unicité, il suit $g(x) = \exp(x) \Leftrightarrow \frac{\exp(x+y)}{\exp(y)} = \exp(x) \Leftrightarrow \exp(x+y) = \exp(x) \exp(y)$.

Remarque 5.6. Il suit que $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ (vu en classe).

- 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$. En effet, la seconde limite découlera de la première (changement de variable $y = -x$), et pour la première, on pose $g(x) = \exp(x) - x$. On a alors $g'(x) = \exp(x) - 1 > 0$ si $x > 0$ car $\exp$ est strictement croissante. Ainsi, dès que $x > 0$, g est strictement croissante et donc $\exp(x) > x \rightarrow +\infty$.
- 6) $\exp(1) = e = 2,7182818 \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (Exercice). Il suit que $\exp(2) = \exp(1+1) = \exp(1) \cdot \exp(1) = e \cdot e = e^2$, et par récurrence que $\exp(n) = e^n$. En prenant les quotients, on montre que $\exp(-n) = e^{-n}$, puis les racines, que $\exp\left(\frac{p}{q}\right) = e^{\frac{p}{q}}$.

Définition 5.7. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $e^x \stackrel{\text{def}}{=} \exp(x)$.

Remarque 5.7. • En fait, $\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ (Exercice).

- $\exp: \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ est strictement croissante, donc injective. La propriété 5) montre qu'elle est surjective (sur $]0, +\infty[$). Elle est donc bijective !

Définition 5.8. Le **logarithme** est la réciproque de $\exp$:

$$\begin{aligned} \log:]0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \log(x). \end{aligned}$$

Autre notation: $\ln(x)$.

Propriétés de $\exp(x)$:

- 1) $D(\log) =]0, +\infty[$ et $\text{Im}(\log) = \mathbb{R}$. De plus, $\log(1) = 0$, $\log \in \mathcal{C}^\infty(]0, +\infty[)$ et on a $x = \exp(\log(x)) \Rightarrow 1 = \exp'(\log(x)) \log'(x) = x \log'(x) \Rightarrow \log'(x) = \frac{1}{x}$ si $x > 0$.
- 2) $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$. (Prendre $\exp$ des deux côtés !)
- 3) $\log$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
- 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x) = +\infty$ et $\lim_{x \downarrow 0} \log(x) = -\infty$. (Changement de variables $x = e^y$.)

Autres bases:

Définition 5.9. Pour $a > 0$, l'**exponentielle en base a** est

$$\begin{aligned} \exp_a: \mathbb{R} &\longrightarrow]0, +\infty[\\ x &\longmapsto \exp_a(x) \stackrel{\text{def}}{=} \exp(\log(a) \cdot x). \end{aligned}$$

Pour $a > 0, a \neq 1$, le **logarithme en base a** est la réciproque de $\exp_a$:

$$\log_a :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)} \text{ (exercice facile).}$$

Remarque 5.8. Comme pour $\exp$, on s'aperçoit que $\exp_a(1) = \exp(\log(a) \cdot 1) = a$, puis que $\exp_a(n) = a^n$, $\exp_a(-n) = a^{-n}$ et $\exp_a(\frac{p}{q}) = a^{\frac{p}{q}}$.

Définition 5.10. Pour $a > 0$, on pose $a^x \stackrel{\text{def}}{=} \exp_a(x) = \exp(\log(a) \cdot x) = e^{\log(a)x}$.

Propriétés:

- $(a^x)' = \log(a)a^x$, et $\log'_a(x) = \frac{1}{\log_a(x)x}$.
- a^x est strictement croissante (décroissante) si $a > 1$ ($a < 1$).
- $\log_a(b^x) = x \log_a(b)$ (vu en classe).
- Changement de base: $\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$ (Exercice !)

Remarque 5.9. Pour $u \in \mathbb{R}$ et $x > 0$, on a donc $x^u = \exp(\log(x)u)$, et donc $(x^u)' = \exp(\log(x)u) \frac{u}{x} = ux^{u-1}$, comme avant.

Définition 5.11 (Fonctions trigo hyperboliques).

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

Remarque 5.10. Comme pour les définitions de $\sin$ et $\cos$, mais sans i .

Propriétés:

- $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
- $\sinh'(x) = \cosh(x)$ et $\cosh'(x) = \sinh(x)$.
- $\sinh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est bijective, de réciproque $\operatorname{arcsinh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$.
- $\cosh: [0, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$ est bij., de réciproque $\operatorname{arccosh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

Théorème 5.9 (Règle de Bernoulli-L'Hospital (BH)). Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $A =]x_0 - d, x_0[\cup]x_0, x_0 + d[$ un voisinage de x_0 . Soient $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ avec $A \subseteq D$. Si

- 1) f, g sont dérivables sur A
- 2) $g(x) \neq 0$ et $g'(x) \neq 0$ pour $x \in A$,
- 3) “ $\frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ ”,
- 4) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell.$$

Idée de la preuve. Utilise le Théorème des accroissements finis généralisé (Exercice).
Explications vues en classe. $\square$

Remarque 5.11. Il existe aussi une version avec $\lim_{x \downarrow x_0} \lim_{x \uparrow x_0} \lim_{x \rightarrow \pm\infty}$.

Exemples:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \stackrel{BH}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = \cos(0) = 1.$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{\log(x)} \stackrel{BH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{px^{p-1}}{1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} px^p = +\infty$ si $p > 0$, et $= 0$ si $p \leq 0$. Cela montre que $\log(x)$ croît moins vite que tout polynôme.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x)^{3/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \exp\left(\log(\cos(x)) \frac{3}{x^2}\right) = \exp\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \log(\cos(x))}{x^2}\right)$ par continuité de $\exp$. En appliquant Bernoulli-L'Hospital à la limite intérieure, on trouve $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \log(\cos(x))}{x^2} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2}{\cos(2x)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = -6$, donc la limite initiale vaut e^{-6} .

Remarque 5.12. Attention: si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ n'existe pas, alors BH ne marche pas. Par exemple, $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(\frac{1}{x}) = 0$ (en utilisant les deux gendarmes) mais $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(\frac{1}{x}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(\frac{1}{x})}{x} \stackrel{BH}{\neq} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})}{1}$ n'existe pas.

3 Études de fonctions

Toute cette section est résumée dans le tableau "Relation entre fonction et dérivées" disponible sur moodle.

$f: I \rightarrow \mathbb{R}, I =]a, b[$	f' existe sur I ($f \in \mathcal{D}^1(I)$)	f'' existe sur I ($f \in \mathcal{D}^2(I)$)
f croissante sur I : $\forall x_1 < x_2$ on a $f(x_1) \leq f(x_2)$	$f'(x) \geq 0 \forall x \in I$	—
f est convexe sur I : $\forall x_1 < x_2$ le graphe de f est <i>en dessous</i> du segment $[(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))]$	f' est croissante sur I	$f''(x) \geq 0 \forall x \in I.$

Définition 5.12. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est **convexe** si $\forall x_1 < x_2$ et $\forall \lambda \in [0, 1]$, on a

$$f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2).$$

Proposition 5.10. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Alors f est convexe $\Leftrightarrow f'$ est croissante.

Preuve. Pour $\Leftarrow$, posons $t = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2$. Alors il existe $u \in]x_1, t[$ et $v \in]t, x_2[$ tels que

$$\frac{f(t) - f(x_1)}{t - x_1} \stackrel{TAF}{=} f'(u) \leq f'(v) \stackrel{TAF}{=} \frac{f(x_2) - f(t)}{x_2 - t},$$

où l'inégalité vient du fait que $u < v$ et que f' est croissante. En réécrivant l'inégalité obtenue avec des λ , on tombe sur la définition de convexité.

Pour $\Rightarrow$, soient $u < v$. On a $f'(u) = \lim_{x \downarrow u} \frac{f(x) - f(u)}{x - u} = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(t) - f(u)}{t - u}$, où l'on a fait le changement de variable $x = t = (1 - \lambda)u + \lambda v$. En faisant l'inverse de ce qu'on a fait au point précédent, on trouve que la convexité (entre u et v) est équivalente à $\frac{f(t) - f(u)}{t - u} \leq \frac{f(v) - f(t)}{v - t}$. En prenant $\lim_{\lambda \downarrow 0}$, on trouve $f'(v)$, et on a donc bien $f'(u) \leq f'(v)$. $\square$

Définition 5.13. Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Alors

- f admet un **maximum local** en $x_0 \in D$ si $\begin{matrix} f(x_0) \geq f(x) \\ f(x_0) \leq f(x) \end{matrix}$ pour x dans un voisinage de x_0 .
- f admet un **maximum global** en $x_0 \in D$ si $\begin{matrix} f(x_0) = \max_{x \in D} f(x) \\ f(x_0) = \min_{x \in D} f(x) \end{matrix}$.
- un **extremum** de f est un min ou un max de f .

$f: I \rightarrow \mathbb{R}, I =]a, b[$	f' existe sur I et continue en x_0	f'' existe sur I et continue en x_0
f a un max local en x_0	$f'(x) = 0$ et f' passe de + à - en $x_0 \Leftrightarrow f'$ décroît autour de x_0	$f''(x) \leq 0$ autour de $x_0 \Leftrightarrow f''(x_0) < 0$.
f a un min local en x_0	$f'(x) = 0$ et f' passe de - à + en $x_0 \Leftrightarrow f'$ croît autour de x_0	$f''(x) \geq 0$ autour de $x_0 \Leftrightarrow f''(x_0) > 0$.
f a un point d'inflexion en $x_0 \Leftrightarrow f$ change de convexité/concavité en x_0	f' a un max local ou min local en x_0	$f''(x_0) = 0$ et f'' change de signe en x_0 .

Définition 5.14. Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Alors f admet un **point stationnaire** en x_0 si $f'(x_0) = 0$.

Recherche d'extrema globaux: Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors les extrema (globaux) de f sont éléments de

- $\{x_0 \in]a, b[\mid f'(x_0) = 0\}$ (points stationnaires)
- $\{x_0 \in]a, b[\mid f'(x_0) \text{ n'existe pas}\}$
- $\{a, b\}$ les bords.

4 Développements limités

Idee: Approximations de fonctions par des polynômes (ex: $\sin(x) \approx x$ et $\cos(x) \approx 1$ pour x proche de 0) mais *en gardant le contrôle sur l'erreur!*

Définition 5.15 (DL en 0). Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ avec $I =]-d, d[\subseteq D$ (f est définie au voisinage I de 0, et en 0). Alors f admet un **développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}$**

en 0 si $\forall x \in I$, on a

$$f(x) = \text{polynôme de degré } \leq n + x^n \varepsilon(x)$$

où $\varepsilon: I \rightarrow \mathbb{R}$ est telle que $\varepsilon(0) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x)$.

Remarque 5.13. • Morale: Autour de 0, on a $f = \text{polynôme} + \text{reste}$ de la forme $x^n \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. Cela veut dire que le reste $\rightarrow 0$ plus vite que x^n .

- Formellement: $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$ avec $a_i \in \mathbb{R}$.
 $\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$

Exemples:

- 1) $f(x) = \sin(x)$ admet un DL d'ordre $n = 1$ en 0. En effet, $\sin(x) = x + x^1 \left(\frac{\sin(x)}{x} - 1 \right)$

si $x \neq 0$, donc $\sin(x) = x + x^1 \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} - 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. On vérifie

$$\text{que } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} - 1 = 1 - 1 = 0 = \varepsilon(0).$$

- 2) $f(x) = |x|$ admet un DL d'ordre $n = 0$ en 0. En effet, $f(x) = |x| = 0 + x^0 \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) = |x| \rightarrow 0 = \varepsilon(0)$.
- 3) $f(x) = |x|$ n'admet pas de DL d'ordre $n = 1$ en 0. Sinon, on aurait $f(x) = a_0 + a_1 x + x^1 \varepsilon(x)$. Alors $f(0) = a_0$, et donc

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_1 x + x \varepsilon(x)}{x} = a_1 + \varepsilon(0) = a_1,$$

contredisant le fait que f n'est pas dérivable en 0 (vu précédemment).

Remarque 5.14. En fait, f admet un DL d'ordre 0 en $a \Leftrightarrow f$ est continue en a et f admet un DL d'ordre 1 en $a \Leftrightarrow f$ est dérivable en a (exercice).

Proposition 5.11 (Unicité des DL). *Les DL sont uniques (s'ils existent). Plus précisément, si (pour $n \leq m$)*

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x) \\ &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + x^n \varepsilon_2(x), \end{aligned}$$

$\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$
 $\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$

alors $a_k = b_k$ pour tout $k \leq n$.

Preuve. Exercice. □

Définition 5.16. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ avec $I =]a - d, a + d[\subseteq D$ (f est définie au voisinage I de a , et en a). Alors f admet un **développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}$ en/autour de a** si $f(x + a)$ admet un DL d'ordre n en 0 $\Leftrightarrow f(x + a) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$ avec $a_i \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$
 $\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \cdots + a_n(x - a)^n + (x - a)^n \tilde{\varepsilon}(x)$$

où $\tilde{\varepsilon}: I \rightarrow \mathbb{R}$ est telle que $\varepsilon(a) = 0 = \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x)$.

Exemple: $f(x) = \sin(x)$ admet un DL d'ordre $n = 1$ en $a = \frac{\pi}{4}$. En effet, $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \frac{\pi}{4}) + (x - \frac{\pi}{4})^1 \tilde{\varepsilon}(x)$, avec $\tilde{\varepsilon}(x) = \frac{\sin(x) - \sqrt{2}/2}{x - \pi/4} - \frac{\sqrt{2}}{2}$ (prolongée par continuité en 0). On vérifie que $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \tilde{\varepsilon}(x) = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin(x) - \sin(\pi/4)}{x - \pi/4} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin'(\pi/4) - \sqrt{2}/2 = 0$.

Théorème 5.12 (Formule de Taylor). Soit $f \in \mathcal{C}^n(I)$ avec $I = \text{intervalle ouvert} \ni a$. Alors f admet un DL d'ordre n en a :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \cdots + a_n(x - a)^n + (x - a)^n \tilde{\varepsilon}(x)$$

$\xrightarrow{x \rightarrow a} 0$

où les a_i sont donnés par

$$a_0 = f(a), a_1 = f'(a), a_2 = \frac{f''(a)}{2}, \dots, \boxed{a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}}, \dots, a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Donc

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + x^n \tilde{\varepsilon}(x).$$

$\xrightarrow{x \rightarrow a} 0$

Preuve. Technique! □

Remarque 5.15 (Formule pour $\tilde{\varepsilon}(x)$). On a $\tilde{\varepsilon}(x) = \frac{1}{n!}(f^{(n)}(u) - f^{(n)}(a))$ pour un u entre x et a . De plus, si $f \in \mathcal{D}^{n+1}(I)$, alors $\tilde{\varepsilon}(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(v)(x - a)$ pour un v entre x et a .

Développements limités à connaître:

- $f(x) = \sin(x)$ est dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Il existe donc un DL de n'importe quel ordre, autour de n'importe quel $a \in \mathbb{R}$! Pour le DL en 0, on calcule: $f^{(k)}(0) = 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots$, et donc $f^{(2n)}(0) = 0$ et $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$. Ainsi:

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + x^{2n+1} \varepsilon(x)$$

$\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$

(DL d'ordre $2n+1$ en 0).

Remarque 5.16. Donc $\sin(x) \approx x \approx x - \frac{1}{6}x^3 \approx x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 \approx \cdots$.

- $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + x^{2n} \varepsilon(x)$ (DL d'ordre $2n$ en 0).
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x)$ (DL d'ordre n en 0).
- $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \pm \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + x^n \varepsilon(x)$ (DL d'ordre n en 0).
- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + x^n \varepsilon(x)$ (DL d'ordre n en 0). Ici la formule

de Taylor est trop compliquée: Comme $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - x^n \frac{x}{1-x}$, on

trouve $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + x^n \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) = \frac{x}{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 \pm \dots + (-1)^n x^n + x^n \varepsilon(x)$ (DL d'ordre n en 0).
 $\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$

Application: Calculs de limites!

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x\varepsilon(x)}{x} = 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 1$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3} = -\frac{1}{6}$ (Vu en classe).
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^4 \varepsilon(x) - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4} = \frac{1}{24} + \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = \frac{1}{24}$.

Autres exemples de DL:

- 1) DL d'ordre 4 en $a = 0$ de $\frac{1}{\cos(x)}$. Idée: $\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1 + (\cos(x) - 1)} = \frac{1}{1+y}$, où $y = \cos(x) - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. On va combiner un DL de $\frac{1}{1+x}$ avec un DL de $\cos(x) - 1$.
 On a

$$\frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 + y^2 \varepsilon(y) \quad \text{et} \quad y = \cos(x) - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + x^2 \varepsilon_2(x)$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + x^4 \varepsilon_4(x).$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos(x)} &= \frac{1}{1+y} = 1 - \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + x^4 \varepsilon_4(x) \right) \\ &\quad + \left(-\frac{1}{2}x^2 + x^2 \varepsilon_2(x) \right)^2 + \left(-\frac{1}{2}x^2 + x^2 \varepsilon_2(x) \right)^2 \cdot \varepsilon(y). \end{aligned}$$

En développant, on s'aperçoit que tous les termes touchant un terme rouge sont de la forme $x^4 \tilde{\varepsilon}(x)$. Ainsi

$$\frac{1}{\cos(x)} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{4}x^4 + x^4 \tilde{\varepsilon}(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + x^4 \tilde{\varepsilon}(x).$$

Remarque 5.17. Ingrédients pour que ça marche:

- (i) DL de $\frac{1}{1+x}$ et de $\cos(x)$
- (ii) $y \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ (sinon $\varepsilon(y) \not\rightarrow 0$).

- 2) DL d'ordre 1 en 0 de $f(x) = e^{\cos(x)}$. On a $e^{\cos(x)} = e^{1+x\varepsilon(x)} = e \cdot e^y$ avec $y = x\varepsilon(x)$.
 Donc $e^{\cos(x)} = e(1 + y + y\varepsilon_1(y)) = e + x \tilde{\varepsilon}(x)$. Attention: en posant $y = \cos(x)$
 $\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$

directement, on n'a pas $y \rightarrow 0$, donc le calcul ne marche pas (on ne trouve pas le DL de $e^{\cos(x)}$).

3) DL d'ordre 3 en $a = 0$ de $\frac{1}{\cos(x)}$. On utilise le DL précédent:

$$\frac{1}{\cos(x)} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + x^3 \underbrace{\left(\frac{5}{24}x + x\varepsilon(x)\right)}_{\text{nouveau } \varepsilon(x)} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + x^3 \underset{x \rightarrow 0}{\overset{\rightarrow}{\varepsilon(x)} 0}.$$

Similairement, celui d'ordre 2 est $1 + \frac{1}{2}x^2 + x^2 \underset{x \rightarrow 0}{\overset{\rightarrow}{\varepsilon(x)} 0}$, celui d'ordre 1 est $1 + x \underset{x \rightarrow 0}{\overset{\rightarrow}{\varepsilon(x)} 0}$

et celui d'ordre 0 est $1 + \underset{x \rightarrow 0}{\overset{\rightarrow}{\varepsilon(x)} 0}$.

4) DL d'ordre 2 en $a = 0$ de $f(x) = 3x^2 + 4x$. On a $f(x) = 4x + 3x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) = 0$.

5) DL d'ordre 2 en $a = 2$ de $f(x) = 3x^2 + 4x$. (Presque) vu en classe.

5 Séries de Taylor

Rappel: Si $f \in \mathcal{C}^n(I)$ avec $I =$ intervalle ouvert $\ni a$, on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \underbrace{(x-a)^n \varepsilon(x)}_{\underset{x \rightarrow 0}{\overset{\rightarrow}{\varepsilon(x)} 0}}$$

Donc, si $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$, a-t-on $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$? Il faut que 1) la série converge, et 2) le reste $r_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Définition 5.17. Pour $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$ et $I =$ intervalle ouvert $\ni a$, la **série de Taylor de f centrée en a** est la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$.

Remarque 5.18. • C'est une série entière! (centre = a . Rayon de convergence = ?).

• Si $a = 0$, on l'appelle aussi **Série de MacLaurin**.

Exemples:

1) $f(x) = \frac{1}{1-x} \in \mathcal{C}^\infty(]-1, 1[)$, $a = 0$. On sait que (i) $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + x^n \underset{x \rightarrow 0}{\overset{\rightarrow}{\varepsilon(x)} 0}$, (ii)

les DL sont uniques $\Rightarrow a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \Rightarrow$ la série de Taylor de f est $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$, (iii) cette

série converge pour tout $x \in]-1, 1[$ et vaut $\frac{1}{1-x}$ (Série géométrique). En somme:

pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $\frac{1}{1-x} = \text{Taylor} \left(\frac{1}{1-x} \right)_{a=0} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$.

2) $f(x) = e^x \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $a = 0$. On a $e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + x^n \underset{x \rightarrow 0}{\overset{\rightarrow}{\varepsilon(x)} 0}$ (DL en 0). La série de

Taylor est donc $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, qui converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ (cf Chapitre 3). Il reste à voir que $r_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Par la formule du reste (remarque après la formule de Taylor), on a $\varepsilon(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(v) \cdot x$ pour un v entre 0 et x . Donc $r_n(x) = x^n \varepsilon(x) = \frac{1}{(n+1)!} e^v x^{n+1}$, et ainsi

$$0 \leq |r_n(x)| = \frac{e^v |x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ainsi $e^x = \text{Taylor}(e^x)_{a=0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Proposition 5.13 (Dérivée de séries entières). *Si $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-a)^k$ avec rayon de convergence $r > 0$, alors $f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1}(k+1)(x-a)^k$ avec même rayon de convergence r .*

Preuve. Dériver terme à terme! □

Conséquences:

- On peut définir $e^x = \exp(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors $\exp(0) = 1$ et

$$\exp'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)x^k}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x). \text{ C'est donc (l'unique) solution de } f' = f, f(0) = 1.$$

- Si $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-a)^k$, alors $f(a) = b_0$, $f'(a) = b_1$, $f''(a) = 2b_2$, ..., $f^{(k)}(a) = k!b_k$.

Donc $b_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$, et cette série est déjà la série de Taylor de f .

Retour aux exemples:

$$3) \log(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + x^n \varepsilon(x) \quad (\text{DL en } 0). \text{ La série de Taylor est donc } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k, \text{ de rayon de convergence } r = 1. \text{ A l'aide de la proposition, on}$$

calculé

$$\begin{aligned} \left(\log(1+x) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right)' &= \frac{1}{1+x} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} k x^{k-1} \\ &= \frac{1}{1-x(-x)} - \sum_{k=1}^{\infty} (-x)^k = 0. \end{aligned}$$

Donc $\log(1+x) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = C$, et en remplaçant $x=0$, on trouve $C=0$.

Ainsi, $\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ pour tout $x \in]-1, 1[$, et donc aussi pour tout $x \in]-1, 1]$ par prolongement par continuité.

Remarque 5.19. Au passage, on a $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x^k$ pour tout $x \in]-1, 1[$.

$$4) \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ (exercice).}$$

Remarque 5.20. Cela donne une raison pour la formule $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$. En effet, on a :

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k}}{(2k)!}}_{\text{termes pairs}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\text{termes impairs}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \cos(x) + i \sin(x). \end{aligned}$$

$$5) \sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

6) Contre-exemple à $f = \text{Taylor}(f)$: On considère $f(x) = e^{-1/x^2}$ prolongée en $x=0$ par $f(0) = 0$. Alors $f'(x) = \frac{2}{x^3}$ si $x \neq 0$, et on calcule $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$ (vu en cours). Ainsi $f'(x) = \frac{2}{x^3}$, prolongée en $x=0$ par $f'(0) = 0$ (cf Série 11, ex 1). Ainsi, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où $\text{Taylor}(f)_{a=0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0}{k!} x^k = 0$.

Mais $f(x) = e^{-1/x^2} \neq \text{Taylor}(f)_{a=0}$ si $x \neq 0$. La raison est que le DL est $f(x) = 0 + r_n(x)$, avec reste $r_n(x) = e^{-1/x^2}$, qui ne tend pas vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$.

Remarque 5.21. Donc $\sin(x)$ et $\sin(x) + e^{-1/x^2}$ ont la même série de Taylor !

Chapitre 6: Intégrales

1 Primitives et intégrales

Définition 6.1. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ (continue) où $I =$ intervalle. Une **primitive** de f est une fonction dérivable $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Remarque 6.1. Si F, G sont deux primitives de f , alors $(F - G)' = f - f = 0$, et donc $F(x) = G(x) + C$.

Notation: $\int f(x) dx = \{\text{primitives de } f\} = \{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}$, où F est une primitive de f .

Abus de notation: $\int f(x) dx = F(x) + C$.

$f(x)$	$\int f(x) dx$
x	$\frac{1}{2}x^2 + C$
$x^r (r \neq -1)$	$\frac{1}{r+1}x^{r+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\log x + C$
e^x	$e^x + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$
$1 + \tan^2(x) + \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$

Remarque 6.2. L'intégrale $\int f(x) dx$ s'appelle l'**intégrale indéfinie** de f .

Changeons d'angle de vue: Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, quelle est l'aire sous la courbe du graphe de f ? Pour approximer l'aire, on commence par choisir $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ (c'est une partition de $[a, b]$). On obtient:

- **Approx. 1 (Inférieure):** Aire $\approx$ aire des rectangles *sous* la courbe:

$$\text{Approx. 1} = \sum_{i=1}^n \left(\inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \right) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

- **Approx. 2 (Supérieure):** Aire $\approx$ aire des rectangles *sur* la courbe:

$$\text{Approx. 2} = \sum_{i=1}^n \left(\sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \right) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Remarque 6.3. On a: $\text{Approx. 1} \leq \text{Aire} \leq \text{Approx. 2}$.

Définition 6.2. Une fonction $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est **intégrable** (au sens de Riemann) si $\sup\{\text{Approx. 1}\} = \inf\{\text{Approx. 2}\} = A \in \mathbb{R}$.

Dans ce cas, on écrit $\int_a^b f(x) dx = A$, c'est l'**intégrale définie** de f sur $[a, b]$.

Convention: $\int_a^a f(x) dx = 0$ et $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$.

Remarque 6.4. $\int_a^b f(x) dx =$ aire *signée* sous la courbe.

Théorème 6.1. Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, ou monotone (ou continue partout sauf en un ensemble fini de points), alors f est intégrable (au sens de Riemann).

Preuve. Technique! (Monotone: exercice.) □

Proposition 6.2 (Premières propriétés). Soient $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ intégrables. Alors

- 1) $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- 2) Si $a < u < b$, $\int_a^b f(x) dx = \int_a^u f(x) dx + \int_u^b f(x) dx$.
- 3) Si $f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

Preuve. Technique! (Idée vue en classe). □

Remarque 6.5. • Cela définit l'**intégrale de Riemann**. Il en existe d'autres: Intégrale de Lebesgue, intégrale d'Itô, ...

- $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(y) dy = \int_a^b f(\xi) d\xi$.
- Comme $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, le point 3) de la proposition implique

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Théorème 6.3 (Théorème de la moyenne). Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors il existe $u \in]a, b[$ tel que $\int_a^b f(x) dx = f(u)(b - a)$.

Preuve. Soit $m = \min_{x \in [a,b]} f(x)$ et $M = \max_{x \in [a,b]} f(x)$. Alors $m \leq f(x) \leq M \Rightarrow \int_a^b m \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b M \, dx$. Comme $\int_a^b m \, dx = m(b-a)$, en divisant par $(b-a)$, on obtient $m \leq y \leq M$, où $y = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$. Par le TVI, f atteint y : il existe donc $u \in]a, b[$ tel que $f(u) = y$. $\square$

Remarque 6.6. Donc $f(u) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx =$ valeur moyenne de f sur $[a, b]$.

Lien entre $\int$ et $\int_a^b$:

Théorème 6.4 (Théorème fondamental du calcul intégral). *Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.*

1) La fonction

$$G: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto G(x) = \int_a^x f(t) \, dt$$

est une primitive de f sur $[a, b]$.

2) Si F est une primitive de f sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$.

Preuve. 1) On a

$$\begin{aligned} G'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t) \, dt - \int_a^x f(t) \, dt \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) \, dt = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(u) \cdot h = \lim_{u \rightarrow x} f(u) = f(x), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le théorème de la moyenne pour trouver $u \in]x, x+h[$; donc $u \rightarrow x$ lorsque $h \rightarrow 0$.

2) On a $F(x) = G(x) + C$ et donc $F(b) - F(a) = G(b) - G(a) + C - C = \int_a^b f(t) \, dt - 0$. $\square$

Notation: $\left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a)$. Donc $\int_a^b f(x) \, dx = \left[\int f(x) \, dx \right]_a^b$.

Exemple: $\int_0^\pi \sin(x) \, dx = \left[-\cos(x) \right]_0^\pi = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = 2$. Mais $\int_0^{2\pi} \sin(x) \, dx = \left[-\cos(x) \right]_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) - (-\cos(0)) = 0$ (l'aire négative compense l'aire positive).

2 Calcul d'intégrales

Exemples faciles:

- 1) $\int (3x + 1) dx = \frac{3}{2}x^2 + x + C.$
- 2) $\int a^x dx = \int e^{\log(a)x} dx = \frac{1}{\log(a)} e^{\log(a)x} + C = \frac{a^x}{\log(a)} + C.$
- 3) $\int f(x)f'(x) dx = \frac{1}{2}f(x)^2 + C.$ Ex: $\int \sin(x) \cos(x) dx = \frac{1}{2} \sin^2(x) + C$
- 4) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| + C.$ Ex: $\int \tan(x) dx = -\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\log |\cos(x)| + C.$
- 5) $\int_0^{\pi/2} \cos^2(x) dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2x)}{2} dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$

Proposition 6.5 (Changement de variable / Substitution). Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $\varphi: [u, v] \rightarrow [a, b]$, avec $\varphi \in \mathcal{C}^1([u, v])$ et $\varphi(u) = a, \varphi(v) = b$. Alors

$$\int_a^b f(x) dx = \int_u^v f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

Preuve. Soit F une primitive de f et $G(t) = F(\varphi(t))$. Alors $G'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$, d'où $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(\varphi(v)) - F(\varphi(u)) = G(v) - G(u) = \int_u^v f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$ $\square$

Remarque 6.7. Si φ est bijective, alors $F(x) = F(\varphi(\varphi^{-1}(x))) = G(\varphi^{-1}(x))$ et donc $\int f(x) dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$ évalué en $t = \varphi^{-1}(x)$.

Exemples:

- $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$. On considère $\varphi: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [0, 1]; \varphi(t) = \sin(t)$. On a $\varphi(0) = 0, \varphi(\frac{\pi}{2}) = 1$ et $\varphi'(t) = \cos(t)$. Écrit plus rapidement: $x = \sin(t) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \cos(t) \Rightarrow dx = \cos(t)dt$. Ainsi $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt = \frac{\pi}{4}$
- $\int \sqrt{1-x^2} dx$. On pose $\varphi: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]; \varphi(t) = \sin(t)$. Alors φ est bijective, et donc $\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos(t) dt = \int \cos^2(t) dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t) + C = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin(t)\sqrt{1-\sin^2(t)}$ évalué en $t = \arcsin(x)$. Donc l'intégrale vaut $\frac{1}{2}\arcsin(x) + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$.

Remarque 6.8. On peut aussi exprimer t en fonction de x . Exemple: $\int e^{x^2} x dx$. On substitue $t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{dt}{2}$ pour trouver $\int e^t \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$

Comment choisir la bonne substitution ? Difficile en général. Exemples

- $\int e^{x^2} x dx, \int \sin(x^2) x dx$: $t = x^2 =$ "ce qu'il y a dedans".

- $\int \frac{x}{1+x^2} dx, \int \frac{\sin(x)}{(1+\cos(x))^3} dx$: $t =$ "ce qu'il y a dessous, ou dedans dessous".
- $\int \sqrt{1-x^2} dx, \int \sqrt{1+x^2} dx$: $t = \sin(x)$ ou $\sinh(x) =$ "ce qui forme un $\cos^2 + \sin^2 = 1$ ou $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$ ".
- Fonctions rationnelles en $\sin, \cos$: $\int \frac{1}{\sin(x)} dx, \int \frac{1}{\sin^4(x)} dx$. Ici, on substitue $t = \tan(x)$ "si les racines disparaissent" (et donc $dx = \frac{dt}{1+t^2}, \sin(x) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$) et $t = \tan(\frac{x}{2})$ sinon (et donc $dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$).

Exemples:

- $\int \frac{1}{\sin(x)}$. On pose $t = \tan(\frac{x}{2})$ pour trouver $\int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{t} dt = \log|t| + C = \log|\tan(\frac{x}{2})| + C$.
- $\int \frac{1}{\sin^4(x)}$. On substitue $t = \tan(x)$ pour trouver $\int \frac{(1+t^2)^2}{t^4} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt = \int t^{-4} + t^{-2} dt = \frac{t^{-3}}{-3} + \frac{t^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{3\tan^3(x)} - \frac{1}{\tan(x)} + C$

Proposition 6.6 (Intégration par parties). Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$, $g \in \mathcal{C}^1([a, b])$ et F une primitive de f . Alors

$$\int_a^b \underbrace{f(x)}_{\uparrow} \underbrace{g(x)}_{\downarrow} dx = \left[F(x)g(x) \right]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x) dx.$$

Preuve. On a $(Fg)' = F'g + Fg' = fg + Fg'$ et donc $\int_a^b fg dx = \int_a^b (Fg)' dx - \int_a^b Fg' dx = [Fg]_a^b - \int_a^b Fg' dx$. $\square$

Remarque 6.9. Cela montre au passage que $\int f(x)g(x) dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x) dx$.

Exemples:

- 1) $\int \underbrace{e^x}_{\uparrow} \underbrace{x}_{\downarrow} dx = e^x x - \int e^x dx = e^x(x-1) + C$.
- 2) $\int \log(x) dx = \int \underbrace{\log(x)}_{\downarrow} \underbrace{1}_{\uparrow} dx = \log(x)x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = x \log(x) - x + C$.
- 3) $\int \cos(x)^2 dx = \int \underbrace{\cos(x)}_{\uparrow} \underbrace{\cos(x)}_{\downarrow} dx = \sin(x) \cos(x) + \int \underbrace{\sin^2(x)}_{=1-\cos^2(x)} dx = \sin(x) \cos(x) + x - \int \cos(x)^2 dx$. Ainsi, si $I = \int \cos(x)^2 dx$, on a $I = \sin(x) \cos(x) + x - I$, d'où $I = \frac{1}{2}(\sin(x) \cos(x) + x) + C$.

4) (Intégration par récurrence)

$$\begin{aligned}
 A_n &= \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(x) dx = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos(x)}_{\uparrow} \underbrace{\cos^{2n-1}(x)}_{\downarrow} dx \\
 &= \left[\sin(x) \cos^{2n-1}(x) \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin(x) (2n-1) \cos^{2n-2}(x) (-\sin(x)) dx \\
 &= 0 + (2n-1) \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin(x)}_{=1-\cos^2(x)} \cos^{2n-2}(x) dx \\
 &= (2n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^{2(n-1)}(x) dx - (2n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(x) dx \\
 &= (2n-1) A_{n-1} - (2n-1) A_n.
 \end{aligned}$$

Ainsi $2nA_n = (2n-1)A_{n-1}$, d'où $A_n = \frac{2n-1}{2n} A_{n-1}$ et $A_0 = \frac{\pi}{2}$. Cela permet de calculer tous les A_n récursivement. (Autre formule vue en classe).

Intégration de fonctions rationnelles: $\frac{p(x)}{q(x)}$, où $p(x), q(x) = \text{polynômes}$. *Building Blocks*:

- (i) $\int \frac{1}{x+d} dx = \log|x+d| + C$. Donc, on a $\int \frac{1}{ax+d} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{x+d/a} dx = \frac{1}{a} \log|x+d/a| + C$.
- (ii) $\int \frac{1}{(x+a)^k} dx = \int (x+a)^{-k} dx = \frac{-1}{k-1} \frac{1}{(x+a)^{k-1}} + C$.
- (iii) $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan(x) + C$. Donc, en substituant $u = x/d$, on a $\int \frac{1}{x^2+d^2} dx = \int \frac{1}{d^2 u^2 + d^2} \cdot d \cdot du = \frac{1}{d} \int \frac{1}{u^2+1} du = \frac{1}{d} \arctan\left(\frac{x}{d}\right) + C$. De plus, si le polynôme $x^2 + bx + c$ a un discriminant $\Delta = b^2 - 4c < 0$, on peut écrire $x^2 + bx + c = (x + \frac{b}{2})^2 + \frac{-\Delta}{4}$ et donc, en substituant $u = \frac{x+b/2}{d}$, on trouve
- $$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{x^2 + bx + c} dx &= \int \frac{1}{(x + \frac{b}{2})^2 + d^2} dx = \int \frac{1}{d^2 u^2 + d^2} \cdot d \cdot du \\
 &= \frac{1}{d} \arctan\left(\frac{x + b/2}{d}\right) + C.
 \end{aligned}$$
- (iv) $\int \frac{2x+b}{x^2+bx+c} dx = \log|x^2+bx+c| + C$.
- (v) $\int \frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^k} dx$: on substitue $u = x^2 + bx + c$, pour trouver $\int u^{-k} du = \frac{1}{1-k} u^{1-k} + C = \frac{1}{1-k} (x^2 + bx + c)^{1-k} + C$.
- (vi) $\int \frac{1}{(x^2+bx+c)^k} dx = \dots$ Formule par récurrence (cf exercices).

A l'aide de (i) - (vi), on peut intégrer tout $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ à l'aide de la décomposition en éléments simples. Méthode:

- 1) Si $\deg(p) \geq \deg(q)$, division polynomiale! Exemple: $\int \frac{3x^4 + 6}{x^4 - x^3 - x + 1} dx = \int \frac{3(x^4 - x^3 - x + 1)}{x^4 - x^3 - x + 1} + \frac{3x^3 + 3x + 3}{x^4 - x^3 - x + 1} dx = 3x + \int \frac{3x^3 + 3x + 3}{x^4 - x^3 - x + 1} dx.$
- 2) Factoriser $q(x)$ et décomposer:

$\frac{p(x)}{q(x)} =$	$\frac{A}{x - u}$	$\frac{A_1}{x - u} + \frac{A_2}{(x - u)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x - u)^k}$
pour chaque facteur	$x - u$	$(x - u)^k$
	$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$	$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \dots + \frac{A_kx + B_k}{(ax^2 + bx + c)^k}$
pour chaque facteur	$(ax^2 + bx + c)$	$(ax^2 + bx + c)^k$

Exemple: $q(x) = x^4 - x^3 + x - 1 = x^3(x - 1) - (x - 1) = (x - 1)(x^3 - 1) = (x - 1)^2(x^2 + x + 1)$. On décompose:

$$\begin{aligned} \frac{3x^3 + 3x + 3}{x^4 - x^3 - x + 1} &= \frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{(x - 1)^2} + \frac{A_3x + B_3}{x^2 + x + 1} \\ &= \frac{(A_1 + A_3)x^3 + (A_2 - 2A_3 + B_3)x^2 + (A_2 + A_3 - 2B_3)x + (-A_1 + A_2 + B_3)}{x^4 - x^3 - x + 1}. \end{aligned}$$

En comparant les coefficients, on trouve $A_1 = 1, A_2 = 3, A_3 = 2, B_3 = 1$. Donc

$$\frac{3x^3 + 3x + 3}{x^4 - x^3 - x + 1} = \frac{1}{x - 1} + \frac{3}{(x - 1)^2} + \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}.$$

- 3) Intégrer les éléments simples! Exemple: $\int \frac{1}{x - 1} dx = \log|x - 1| + C,$

$$\int \frac{3}{(x - 1)^2} dx = \frac{-3}{x - 1} + C, \int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx = \log|x^2 + x + 1| + C. \text{ Ainsi:}$$

$$\int \frac{3x^4 + 6}{x^4 - x^3 - x + 1} dx = 3x + \log|x - 1| + \frac{-3}{x - 1} + \log(x^2 + x + 1) + C.$$

3 Intégrales généralisées / impropres

On a vu que si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ représente l'aire (signée) sous la courbe. On aimerait généraliser cela à $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ et $f:]-\infty, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$.

Exemples: $\int_0^1 \log(x) dx = ?$, $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = ?$

Problème: Ne marche pas directement car l'Approx. 1 ou l'Approx. 2 est toujours $\pm\infty$.

Solution: Limites!

Définition 6.3. 1) Soit $f: [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue ($b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$). Alors

$$\int_a^{b-} f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{u \uparrow b} \int_a^u f(x) dx.$$

2) Soit $f:]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue ($a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$). Alors

$$\int_{a^+}^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{u \downarrow a} \int_u^b f(x) dx.$$

3) Soit $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue ($a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$). Alors

$$\int_{a^+}^{b^-} f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \int_{a^+}^w f(x) dx + \int_w^{b^-} f(x) dx = \lim_{u \downarrow a} \int_u^w f(x) + \lim_{v \uparrow b} \int_w^v f(x) dx,$$

où $w \in]a, b[$ est arbitraire.

Remarque 6.10. • Ce sont des **intégrales généralisées/impropres**.

- L'intégrale **converge** si la (les !) limite existe $\in \mathbb{R}$, et elle **diverge** sinon.
- Pour 3), on peut montrer que le résultat est indépendant du w choisi.

Notation: $\int_a^{+\infty} = \int_a^{+\infty}$, $\int_{-\infty}^b = \int_{-\infty}^b$. Exemples:

$$1) \int_{0^+}^1 \log(x) dx = \lim_{u \downarrow 0} \int_u^1 \log(x) dx = \lim_{u \downarrow 0} [x \log(x) - x]_u^1 = \lim_{u \downarrow 0} (-1 - u \log(u) - u) = -1 - \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{\log(1/v)}{v} = -1 + \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{\log(v)}{v} \stackrel{\text{BH}}{=} -1 + 0 = -1.$$

$$2) \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^u e^{-x} dx = \lim_{u \rightarrow +\infty} [-e^{-x}]_0^u = \lim_{u \rightarrow +\infty} (1 - e^{-u}) = 1.$$

$$3) \text{ Pour } r > 0, \text{ on a } \int_{0^+}^1 \frac{1}{x^r} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-r} & \text{si } r \leq 1 \\ +\infty & \text{si } r > 1. \end{cases} \quad (\text{Vu en classe.})$$

$$\text{Exercice: } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^r} dx = \begin{cases} +\infty & \text{si } r \leq 1 \\ \frac{1}{r-1} & \text{si } r > 1. \end{cases}$$

$$4) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \\ = \lim_{u \rightarrow -\infty} [\arctan(x)]_u^0 + \lim_{v \rightarrow +\infty} [\arctan(x)]_0^v \\ = 0 - \lim_{u \rightarrow -\infty} \arctan(u) + \lim_{v \rightarrow +\infty} \arctan(v) - 0 = - - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Remarque 6.11. Si $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge (i.e. si les **deux** limites existent $\in \mathbb{R}$) alors cette intégrale vaut $\lim_{u \rightarrow +\infty} \int_{-u}^u f(x) dx$ (c'est la **valeur principale de Cauchy** de l'intégrale).

Mais attention:

$$5) \int_{-\infty}^{+\infty} x dx \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^0 x dx + \int_0^{+\infty} x dx = \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{-u^2}{2} + \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{v^2}{2} = -\infty + \infty, \text{ donc l'intégrale diverge. En revanche, sa valeur principale de Cauchy existe et vaut } \\ \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_{-u}^u x dx = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-u}^u = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^2}{2} - \frac{u^2}{2} = 0. \text{ Ce n'est donc pas la valeur de l'intégrale.}$$

Proposition 6.7 (Comparaison d'intégrales). Soient $f, g: [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a, b[$. Alors

- 1) $\int_a^{b^-} g(x) dx$ converge $\Rightarrow \int_a^{b^-} f(x) dx$ converge
- 2) $\int_a^{b^-} f(x) dx$ diverge $\Rightarrow \int_a^{b^-} g(x) dx$ diverge.

Preuve. Théorème du gendarme seul! □

Remarque 6.12. La prop. reste valable en remplaçant $[a, b[$ par $]a, b]$ et $\int_a^{b^-}$ par $\int_{a^+}^b$, et $[a, b[$ par $]a, b]$ et $\int_a^{b^-}$ par $\int_{a^+}^b$.

Exemple: $\int_0^{1^-} \frac{1}{\sqrt{1-t^3}} dt$ converge par comparaison. En effet, pour $t \in [0, 1[$, on a $t^3 \leq t \Rightarrow 1 - t^3 \geq 1 - t \Rightarrow \sqrt{1-t^3} \geq \sqrt{1-t} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-t^3}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ et en substituant $x = 1 - t$, on trouve $\int_0^{1^-} \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt = \int_{0^+}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ qui converge.

Proposition 6.8 (Comparaison intégrale/série). Soit $f: [n_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive ($f(x) \geq 0$), continue et décroissante (pour x assez grand). Alors la série $\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$

et l'intégrale $\int_{n_0}^{+\infty} f(x) dx$ convergent/divergent en même temps.

Preuve visuelle. Vue en classe. □

Exemples:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge $\Leftrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ converge $\Leftrightarrow p > 1$.
- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log(n))^p}$ converge $\Leftrightarrow \int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log(x))^p} dx$. En substituant $u = \log(x)$, cette intégrale vaut $\int_{\log(2)}^{+\infty} \frac{1}{e^u \cdot u^p} e^u du = \int_{\log(2)}^{+\infty} \frac{1}{u^p} du$ qui converge $\Leftrightarrow p > 1$. Ainsi la série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log(n))^p}$ converge $\Leftrightarrow p > 1$.

En particulier, la série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log(n)}$ diverge, mais $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2(n)}$ converge!