Remarque sur les corrigés

Lire une solution, même partielle, d'un exercice sans avoir essayé *plusieurs heures*[1] de le résoudre est presque totalement inutile. Faire un exercice en ayant la solution sous les yeux est *beaucoup plus facile*, et ne prépare que très mal à un examen (qui se fait sans solutions).

Par conséquent, la lecture du présent corrigé est *déconseillée*, et se fait à vos risques et périls.

1. (même parfois plusieurs jours)

Analyse I — Corrigé 8

EPFL – Sections SIE/GC/SC

Solution 1.

(a) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $|x-17| \le \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \le \varepsilon$.

(b) $\exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $|x - x_0| \le \delta \Rightarrow f(x) \neq 0$.

(c) $\exists c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $x \ge c \Rightarrow f(x) \le x^2$.

(d) $\forall c \ge 0,\ \exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}$ on a $|x+4| \le \delta \Rightarrow |f(x)| \ge c$.

Solution 2.

(a) En observant que le dénominateur divise le numérateur, on a

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + x^2 - 2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\,(x^2+2x+2)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \left(x^2 + 2x + 2\right) = 5.$$

(b) On utilise la formule $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ avec $a = \sqrt[3]{x}$ et $b = 2$ pour obtenir

$$\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8} = \lim_{x\to 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{(\sqrt[3]{x}-2)((\sqrt[3]{x})^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4)} = \lim_{x\to 8} \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4} = \frac{1}{12}.$$

(c) En utilisant que $\cos(2x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2 = 1 - 2\sin(x)^2$, on obtient

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) - 1}{\sin(x^2)} &= \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin(x)^2}{\sin(x^2)} = -2 \cdot \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)^2}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\sin(x^2)} \right) \\ &= -2 \cdot \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^2 \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin(x^2)}}_{= \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin(y)}} = -2 \cdot 1^2 \cdot 1 = -2.\end{aligned}$$

(d) Comme $1 - x^2 = (1-x)(1+x)$, on a

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \right) = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(1-x)(1+x)} = \lim_{x\to 1} \frac{-1}{1+x} = -\frac{1}{2}.$$

(e) On a

$$\lim_{x\to 0} \sin(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot x = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \lim_{x\to 0} x = 1 \cdot 0 = 0.$$

(f) En utilisant la formule $\sin(a+h) = \sin(a)\cos(h) + \cos(a)\sin(h)$, on obtient

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \sin(a+h) &= \lim_{h\to 0} \sin(a)\cos(h) + \lim_{h\to 0} \cos(a)\sin(h) \\ &= \sin(a) \cdot \lim_{h\to 0} \cos(h) + \cos(a) \lim_{h\to 0} \sin(h) = \sin(a).\end{aligned}$$

(g) En faisant le changement de variables $h = x - a$, et en utilisant une formule trigonométrique, on trouve

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{\cos(x) - \cos(a)}{x - a} &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(a+h) - \cos(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(a)\cos(h) - \sin(a)\sin(h) - \cos(a)}{h} \\
&= \cos(a) \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(a) \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h}.
\end{aligned}$$

En multipliant par $\cos(h) + 1$ en haut et en bas, on trouve

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos^2(h) - 1}{h(\cos(h) + 1)} = -\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)^2}{h^2} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{h}{\cos(h) + 1} = -1^2 \cdot 0.$$

Donc comme $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$, on trouve que

$$\lim_{x\to a} \frac{\cos(x) - \cos(a)}{x - a} = -\sin(a).$$

Alternativement, on peut utiliser une autre formule trigonométrique pour trouver

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{\cos(x) - \cos(a)}{x - a} &= \lim_{x\to a} \frac{-2 \cdot \sin\left(\frac{x+a}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x - a} \\
&= -\left(\lim_{x\to a} \sin\left(\frac{x+a}{2}\right)\right) \cdot \left(\lim_{x\to a} \frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}\right) \\
&= -\left(\lim_{h\to 0} \sin(a+h)\right) \cdot \left(\lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y}\right) = -\sin(a)
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé le changement de variables $h = \frac{x+a}{2} - a$ et le point (f), et le changement de variables $y = \frac{x-a}{2}$.

(h) En multipliant par h^2/h^2, on obtient $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{1 - 1/h^2}{1 + 1/h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 - 1}{h^2 + 1} = -1$.

(i) Pour tout $x \neq 0$, on a $-x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x^4}\right) \leq x^2$. Comme $\lim_{x\to 0} -x^2 = 0 = \lim_{x\to 0} x^2$, le théorème des deux gendarmes implique donc que $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^4}\right) = 0$.

(j) La fonction $f\colon [0,\pi] \to [-1,1]$ donnée par $f(x) = \cos(x)$ est strictement monotone et bijective. Comme $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$, et $f^{-1} = \arccos$, il suit que $\lim_{x\to 1} \arccos(x) = 0$. En faisant un changement de variables $y = 9x^2$, on trouve donc

$$\lim_{x\to \frac{1}{3}} \arccos(9x^2) = \lim_{y\to 1} \arccos(y) = 0.$$

Solution 3.

<u>Solution avec les suites:</u> Supposons que $\lim\limits_{x\to u} f(x) = \ell$; on sait donc que pour toute suite $(a_n) \subset D(f) \setminus \{u\}$, telle que $a_n \to u$, on a $f(a_n) \to \ell$. Cela reste vrai si on ajoute la condition $a_n > u$ ou $a_n < u$; la conclusion reste la même: $f(a_n) \to \ell$. Par définition, on a donc $\lim\limits_{x\downarrow u} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\uparrow u} f(x) = \ell$.

A l'inverse, supposons que $\lim\limits_{x\uparrow u} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\downarrow u} f(x) = \ell$. Soit $(a_n) \subset D(f) \setminus \{u\}$, telle que $a_n \to u$. Soit (a_{n_k}) la sous-suite de (a_n) formée des termes $< u$, et (a_{m_k}) celles formée des termes $> u$. On a donc $f(a_{n_k}) \to \ell$ et $f(a_{m_k}) \to \ell$ (par définition de $\lim\limits_{x\uparrow u} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\downarrow u} f(x) = \ell$). Pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe donc K_1 tel que $|f(a_{n_k}) - \ell| \leq \varepsilon$ dès que $k \geq K_1$ et K_2 tel que $|f(a_{m_k}) - \ell| \leq \varepsilon$ dès que $k \geq K_2$. Ainsi, pour $n \geq \max(n_{K_1}, m_{K_2})$, on a $a_n = a_{n_k}$ ou $a_n = a_{m_k}$ pour un k assez grand, d'où $f(a_n) = f(a_{n_k})$ ou $f(a_n) = f(a_{m_k})$, et donc $|f(a_n) - \ell| \leq \varepsilon$ dans les deux cas.

<u>Solution avec ε et δ:</u>

Cela découle essentiellement du fait que $|x-u| \leq \delta \Leftrightarrow u-\delta \leq x \leq u$ ou $u \leq x \leq u+\delta$.

Supposons que $\lim\limits_{x\to u} f(x) = \ell$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in D(f) \setminus \{u\}$, on a $|x-u| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$. Ainsi, $u - \delta \leq x < u \Rightarrow |x - u| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ et $u < x \leq u + \delta \Rightarrow |x - u| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$. Comme ε est arbitraire, cela montre que $\lim\limits_{x\uparrow u} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\downarrow u} f(x) = \ell$.

Supposons que $\lim\limits_{x\uparrow u} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\downarrow u} f(x) = \ell$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc δ_1 et δ_2 tels que pour tout $x \in D(f) \setminus \{u\}$, on a $u - \delta_1 \leq x < u \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ et $u < x \leq u + \delta_2 \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$. On pose $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Alors, dès que $|x - u| \leq \delta$, on a soit $u - \delta \leq x < u \Rightarrow u - \delta_1 \leq x < u \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$, soit $u < x \leq u + \delta \Rightarrow u < x \leq u + \delta_2 \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$. Dans les deux cas, $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$, et comme ε était arbitraire, on a donc montré $\lim\limits_{x\to u} f(x) = \ell$.

Solution 4.

(a) On peut simplifier la fraction et trouver la limite

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x^2 - 4} &= \lim_{x\to 2} \frac{\frac{2}{2x} - \frac{x}{2x}}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{2x} \frac{2-x}{(x-2)(x+2)} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{1}{2x} \frac{-(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{-1}{2x(x+2)} = -\frac{1}{16}.\end{aligned}$$

(b) On multiplie et divise par les conjugués:

$$\frac{\sqrt{6-x} - 2}{\sqrt{3-x} - 1} = \frac{\sqrt{6-x} - 2}{\sqrt{3-x} - 1} \frac{\sqrt{6-x} + 2}{\sqrt{6-x} + 2} \frac{\sqrt{3-x} + 1}{\sqrt{3-x} + 1} = \frac{\sqrt{3-x} + 1}{\sqrt{6-x} + 2}$$

On a donc

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{6-x} - 2}{\sqrt{3-x} - 1} = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{3-x} + 1}{\sqrt{6-x} + 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\,.$$

(c) On calcule $\lim\limits_{x\downarrow 3} \dfrac{|x-3|}{x-3} = \lim\limits_{x\downarrow 3} \dfrac{x-3}{x-3} = 1$ et $\lim\limits_{x\uparrow 3} \dfrac{|x-3|}{x-3} = \lim\limits_{x\uparrow 3} \dfrac{-(x-3)}{x-3} = -1$.
Comme les limites ne coïncident pas, $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{|x-3|}{x-3}$ n'existe pas.

On peut aussi considérer les suites $a_n = 3 + \frac{1}{n}$ et $b_n = 3 - \frac{1}{n}$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$), et constater que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3 = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, mais que

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 1 \neq -1 = \lim_{n\to\infty} f(b_n).$$

Donc la limite n'existe pas.

(d) Commençons par remarquer que pour tout $x \neq \pm 2$,

$$\frac{5x-6-x^2}{4-x^2} = \frac{-(x-2)(x-3)}{-(x-2)(x+2)} = \frac{x-3}{x+2}$$

On a donc

$$\lim_{x\to 2} \frac{5x-6-x^2}{4-x^2} = \lim_{x\to 2} \frac{x-3}{x+2} = -\frac{1}{4}.$$

(e) On a

$$\lim_{x\to -2} \frac{5x-6-x^2}{4-x^2} = \lim_{x\to -2} \frac{x-3}{x+2} = \lim_{y\to 0} \frac{y-5}{y} = \lim_{y\to 0} \left(1 - \frac{5}{y}\right).$$

(changement de variables $y = x+2$). En prenant la suite $a_n = \frac{1}{n}$, on trouve que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, mais

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{5}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} (1-5n) = -\infty,$$

et n'existe donc pas dans $\mathbb{R}$. Ainsi $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{5x-6-x^2}{4-x^2}$ n'existe pas dans $\mathbb{R}$.

(f) Comme $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{\tan^2(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\tan(x)}{x}\right)^2 = \left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)}{x}\right)^2$ (changement de variables $x \to x - \alpha$ et propriétés des limites), et

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)} = 1 \cdot 1 = 1,$$

on trouve

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{\tan^2(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2} = 1^2 = 1.$$

Solution 5.

(a) On a

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{2x} \overset{y=2x}{=} \lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1.$$

où la première égalité vient du fait que $x \neq 0$ et la dernière à été montrée en cours. Comme $f(0) = 2 \neq 1$, la fonction n'est pas continue en $x = 0$.

(b) On a montré en cours que $\lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas. Il suit que $\lim_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas, et f n'est donc pas continue en $x = 0$.

(c) En multipliant par $1 + \cos(x)$ en haut et en bas, on obtient

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(x)}{x^2(1+\cos(x))} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos(x)}$$
$$= 1^2 \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2} = f(0),$$

donc f est continue en 0.

(d) On a $-x \leq x\sin(\frac{1}{x}) \leq x$. Comme $\lim_{x\to 0} -x = 0 = \lim_{x\to 0} x$, on conclut par le Théorème des deux gendarmes que $\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. Ainsi,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \neq 1 = f(0)$$

et f n'est donc pas continue en 0.

Solution 6.

Pour $\sin(x)$, cela découle du 2(f) (ou l'on montre que $\lim_{h\to 0} \sin(a+h) = \sin(a)$), avec le changement de variables $x = a+h$ (en effet, on obtient alors $\lim_{x\to a} \sin(x) = \sin(a)$).
Pour $\cos(x)$, on peut soit le montrer directement (comme pour $\sin(x)$), soit utiliser le 2(g) pour trouver

$$\lim_{x\to a} \cos(x) - \cos(a) = \lim_{x\to a} \frac{\cos(x)-\cos(a)}{x-a} \cdot \lim_{x\to a}(x-a) = -\sin(a)\cdot 0 = 0,$$

d'où

$$\lim_{x\to a} \cos(x) = \cos(a) + \lim_{x\to a} (\cos(x) - \cos(a)) = \cos(a) + 0 = \cos(a).$$

Pour $\tan(x)$, c'est une simple application du quotient de limites. Et pour les fonctions $\arcsin(x), \arccos(x), \arctan(x)$, cela suit de la proposition sur les limites de fonctions réciproques vues en cours.

Plus précisément, pour $\arcsin(x)$, on considère $f\colon [-\pi/2, \pi/2] \to [-1,1]; x \mapsto \sin(x)$, de sorte que $f^{-1}(x) = \arcsin(x)$. La fonction f est strictement monotone, et comme son image est $[-1,1]$, arcsin est défini en tout voisinage de $v \in]-1,1[$, et en un voisinage à gauche de 1 et à droite de -1. La proposition du cours donne alors

$$\lim_{x\to v} \arcsin(x) = \arcsin(v), \quad \lim_{x\downarrow -1} \arcsin(x) = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\uparrow 1} \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Cela montre la continuité (jusqu'au bord) de $\arcsin(x)$.