

## Remarque sur les corrigés

Lire une solution, même partielle, d'un exercice sans avoir essayé *plusieurs heures*<sup>1</sup> de le résoudre est presque totalement inutile. Faire un exercice en ayant la solution sous les yeux est *beaucoup plus facile*, et ne prépare que très mal à un examen (qui se fait sans solutions).

Par conséquent, la lecture du présent corrigé est *déconseillée*, et se fait à vos risques et périls.

---

1. (même parfois plusieurs jours)

**Solution 1.**

- (a) Vrai. Comme la série converge, on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n a_n = 0$ . Ainsi  $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} |(-1)^n a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|$ , et il suit que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  par le théorème des deux gendarmes.
- (b) Faux. Prendre par exemple  $a_n = \frac{1}{n}$ . On retrouve alors la série harmonique, qui diverge (vu en cours).
- (c) Vrai. Comme  $|(-1)^n a_n| = |a_n|$  et  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  converge,  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  converge absolument, donc converge.
- (d) Faux. Prendre par exemple la suite  $a_n = -n$  qui est strictement décroissante. Comme  $(-1)^n a_n = (-1)^{n+1} n$  ne converge pas vers zéro, la série diverge.
- (e) Faux. Prendre par exemple la suite  $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ . Par le critère de Leibniz, la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  converge. Par contre  $a_n^2 = \frac{1}{n}$  et on obtient la série harmonique qui diverge.
- (f) Vrai. Comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ , il existe  $N$  tel que  $|a_n| \leq 1$  pour tout  $n \geq N$  (définition de la convergence avec  $\varepsilon = 1$ ). Donc  $0 \leq a_n^2 \leq |a_n|$  pour tout  $n \geq N$  ( $\Rightarrow$  pour  $n$  assez grand) et ainsi la série  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  converge par le critère de comparaison.
- (g) Faux. Prendre  $a_n = \frac{1}{n^2}$ .
- (h) Faux. En effet, seuls les termes  $a_k$  avec  $k$  grand comptent pour la convergence ou non d'une série  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ . Comme  $a_k = \frac{1}{k^{3/2}}$  pour  $k$  assez grand, et que  $p = \frac{3}{2} > 1$ , la série converge. (Même si les mille premiers termes de la série sont ceux d'une série divergente.)

Version formelle: utiliser le critère de comparaison (pour  $k > 1000$ ). Ou alors, si  $u = \sum_{k=0}^{1000} 5^k$  alors on a  $0 \leq \sum_{k=1}^n a_k \leq u + \sum_{k=1001}^n \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} \leq u + v$ , où  $v = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$ .

La suite  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$  est donc croissante et bornée, et converge.

- (i) Vrai. On utilise la définition des séries comme limite des sommes partielles  $S_n$ , et le fait que la limite d'une somme est la somme des limites, si les limites existent.

**Solution 2.**

- (a) Ce n'est pas une série entière  $\Rightarrow$  pas de rayon de convergence. Pour le domaine, on a

$$0 \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{\cos(nx)}{2^n} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$$

La série converge donc absolument pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , et le domaine de convergence est  $\mathbb{R}$ .

- (b) C'est une série entière (centrée en 0). On applique la formule pour le rayon provenant du critère de D'Alembert:

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_n}{b_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Ainsi, la série converge absolument pour  $x \in ]-1, 1[$ . Lorsque  $x = 1$ , c'est  $(-1) \cdot$  la série harmonique alternée, donc elle converge. Lorsque  $x = -1$ , la série est  $(-1) \cdot$  la série harmonique, et donc diverge. Le domaine est donc  $D = ]-1, 1]$ .

- (c) C'est une série entière centrée en 0. En utilisant d'Alembert, on trouve comme au (b) que  $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$ . Donc la série converge si  $|x| < 1$  et diverge si  $|x| > 1$ . On remarque alors qu'elle diverge aussi pour  $x = 1$  et  $x = -1$  (le terme général ne tendant pas vers 0). Le domaine est donc  $D = ]-1, 1[$ .

- (d) C'est une série entière centrée en 0. A nouveau, comme au (b) et (c) on utilise d'Alembert pour trouver  $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1$ . Donc la série converge si  $|x| < 1$  et diverge si  $|x| > 1$ . Par contre ici, si  $x = 1$ , on a la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  qui converge, et si  $x = -1$ , on trouve  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1)^n}{n^2}$  qui converge (elle converge même absolument). Le domaine est donc  $D = [-1, 1]$ .

- (e) C'est une série entière, centrée en  $a$ . Trouvons son rayon de convergence (à l'aide de la formule venant du critère de Cauchy):

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} |1|^{-1/k} = 1.$$

Donc la série converge si  $|x - a| < 1$  et diverge si  $|x - a| > 1$ . Si  $|x - a| = 1$ , le terme vaut soit 1, soit  $(-1)^n$ , et ne tend donc pas vers zéro; la série diverge donc dans ce cas. Le domaine est donc  $]a - 1, a + 1[$ .

- (f) Ce n'est pas une série entière  $\Rightarrow$  pas de rayon de convergence. On applique le critère de Cauchy, pour trouver  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \left| \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \right|$ . La série converge donc absolument si  $\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \neq \pm 1$ , i.e., si  $x$  n'est pas un entier impair. Si  $x$  est un entier impair, la série diverge (le terme général ne tend pas vers 0). Donc le domaine est  $\mathbb{R} \setminus \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ .

- (g) C'est une série entière, centrée en 1. On applique la formule pour le rayon provenant du critère de D'Alembert:

$$r = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{b_k}{b_{k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{3^{2(k+1)}(k+1)^2}{3^{2k}k^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} 9 \frac{(k+1)^2}{k^2} = 9.$$

Ainsi, la série converge absolument pour  $|x-1| < 9 \Leftrightarrow x \in ]-8, 10[$ . Lorsque  $x = -8$  ou  $x = 10$ , la série converge absolument (par comparaison avec la série géométrique  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k}$  par exemple). Le domaine est donc  $[-8, 10]$ .

- (h) C'est une série entière, centrée en 0: En effet,  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ ,

avec  $b_{2k} = 0$  et  $b_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$ . Au lieu de calculer le rayon de convergence directement, on applique le critère de d'Alembert:

$$\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x|^{2k+3}(2k+1)!}{(2k+3)!|x|^{2k+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x|^2}{(2k+3)(2k+2)} = 0.$$

Comme  $\rho < 1$ , la série converge pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Le domaine est donc  $\mathbb{R}$  et le rayon  $r = +\infty$ .

### Solution 3.

- (a) Ici le dénominateur ne s'annule jamais, donc  $D(f) = \mathbb{R}$ . On vérifie que  $f(-x) = f(x)$ , donc  $f$  est paire. Supposons que  $f$  soit périodique de période  $T$ . Comme  $f$  n'a pas de pôle, elle est bornée sur  $[0, T]$ , donc aussi bornée sur tout  $\mathbb{R}$  (ce qui se passe sur l'intervalle  $[0, T]$  est répété à l'infini). Mais on voit que  $f$  n'est pas bornée sur  $\mathbb{R}$ , c'est donc une contradiction. Donc  $f$  n'est pas périodique.
- (b) On a  $D(f) = \mathbb{R}$  (tout est défini partout). On vérifie que  $f(-x) = -f(x)$ , donc  $f$  est impaire. Comme  $\sin(x)$  est  $2\pi$ -périodique,  $\sin(\frac{x}{2})$  est  $4\pi$ -périodique. De plus,  $\cos(\frac{x}{3})$  est  $6\pi$ -périodique, et  $f(x)$  est donc  $12\pi$  périodique (plus petit multiple commun entre 4 et 6). On se convainc (en traçant le graphe, par exemple) que  $12\pi$  est bien la plus petite période, donc la période de  $f(x)$ .
- (c)  $D(f) = \mathbb{R}$  car tout est bien défini. On vérifie que  $f(-x) \neq f(x)$ ,  $-f(x)$  (par exemple pour  $x = -\frac{1}{4}$ ), donc  $f$  n'a pas de parité. De plus,  $f$  est 1-périodique, c'est même sa période fondamentale.
- (d) Pour que  $f$  soit définie, il faut d'une part que le terme sous la racine soit positif et d'autre part que le dénominateur soit non nul. Cela correspond à  $x \notin ]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$  et  $|x| \neq 2$ . Donc  $D(f) = \mathbb{R} \setminus (]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[ \cup \{\pm 2\})$ . On vérifie que  $f(-x) = f(x)$ , donc  $f$  est paire. De plus,  $f$  n'est pas périodique car très grande pour 1.99999 mais plus jamais aussi grande pour  $x > 2$ . (Utiliser les limites de fonctions pour une version plus formelle!)

### Solution 4.

- (a)  $f(x) = 2^{-x}$ .

- (b)  $f(x) = |\cos x|$ , ou  $|\cos(ax)|$  avec  $a \neq 0$ .
- (c)  $f(x) = x + 1$ .
- (d)  $f(x) = \sin(2\pi x)$ .

**Solution 5.**

Rappelons que  $\sup_{x \in A} f(x)$  et  $\inf_{x \in A} f(x)$  existent *toujours* (dans  $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ) pour  $f(A)$  borné, ce qui n'est pas le cas de  $\max(x)$  et  $\min f(x)$ .

- (a)  $f(A)$  n'est pas borné, donc  $\sup_{x \in A} f(x) = +\infty$ ,  $\inf_{x \in A} f(x) = -\infty$ , mais n'a ni minimum ni maximum.
- (b)  $\sup_{x \in A} f(x) = +\infty$ ,  $\inf_{x \in A} f(x) = 0$ , mais pas de minimum ni de maximum.
- (c)  $\sup_{x \in A} f(x) = 16$ , mais pas de maximum,  $\inf_{x \in A} f(x) = \min_{x \in A} f(x) = f(1) = 1$ .
- (d)  $\sup_{x \in A} f(x) = \max_{x \in A} f(x) = f(\frac{\pi}{2}) = 1$ . Ensuite,  $\inf_{x \in A} f(x) = -1$ . En effet, pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe un  $x_* \in ]-\frac{\pi}{2}, \pi]$  (proche de  $-\frac{\pi}{2}$ ), tel que  $-1 \leq f(x_*) \leq -1 + \varepsilon$ . Par contre, pas de minimum (l'infimum n'est pas dans  $f(A)$ ).
- (e)  $\sup_{x \in A} f(x) = \max_{x \in A} f(x) = -1$ ,  $\inf_{x \in A} f(x) = -\infty$ , pas de minimum.
- (f)  $\sup_{x \in A} f(x) = 1$  (en effet  $f(x) \leq 1$  et pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe un  $x_*$  tel que  $1 - \varepsilon \leq f(x_*) \leq 1$ ),  $\inf_{x \in A} f(x) = 0 = \min_{x \in A} f(x)$ , pas de maximum.

**Solution 6.**

On a

$$f \circ g(x) = \begin{cases} 2g(x) - 3 & \text{si } g(x) \geq 0 \\ g(x) & \text{si } g(x) < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x^2 - 3 & \text{si } g(x) \geq 0 \text{ et } x \geq 1 \\ 2(x+2) - 3 & \text{si } g(x) \geq 0 \text{ et } x < 1 \\ x^2 & \text{si } g(x) < 0 \text{ et } x \geq 1 \\ x+2 & \text{si } g(x) < 0 \text{ et } x < 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x^2 - 3 & \text{si } x \geq 1 \\ 2x + 1 & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ x + 2 & \text{si } x < -2 \end{cases}$$

et

$$g \circ f(x) = \begin{cases} f(x)^2 & \text{si } f(x) \geq 1 \\ f(x) + 2 & \text{si } f(x) < 1 \end{cases} = \begin{cases} (2x-3)^2 & \text{si } f(x) \geq 1 \text{ et } x \geq 0 \\ x^2 & \text{si } f(x) \geq 1 \text{ et } x < 0 \\ (2x-3) + 2 & \text{si } f(x) < 1 \text{ et } x \geq 0 \\ x + 2 & \text{si } f(x) < 1 \text{ et } x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (2x-3)^2 & \text{si } x \geq 2 \\ 2x - 1 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ x + 2 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Solution 7.

