Remarque sur les corrigés

Lire une solution, même partielle, d'un exercice sans avoir essayé *plusieurs heures*[1] de le résoudre est presque totalement inutile. Faire un exercice en ayant la solution sous les yeux est *beaucoup plus facile*, et ne prépare que très mal à un examen (qui se fait sans solutions).

Par conséquent, la lecture du présent corrigé est *déconseillée*, et se fait à vos risques et périls.

1. (même parfois plusieurs jours)

Solution 1.

(a) <u>Initialisation:</u> $a_0 = c = c + 0b$, donc $P(0)$ est vérifiée. <u>Pas de récurrence:</u> On suppose que $P(n)$ est vraie, et on montre $P(n+1)$: $a_{n+1} = a_n + b \overset{P(n)}{=} bn + c + b = b(n+1) + c$, et donc $P(n+1)$ est vérifiée.

(b) $a_1 = 1 = \frac{1}{1}$, donc $P(1)$ est vérifiée. Pour $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, on a $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n+1} \overset{P(n)}{=} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+1} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{n+1}$, donc $P(n+1)$ est vérifiée.

(c) Pour $n = 1$, $(x-1)(1) = x^1 - 1$, donc $P(1)$ est vérifiée. Pour $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, on a

$$\begin{aligned}(x-1)(x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1) &= (x-1)x^n + \underbrace{(x-1)(x^{n-1} + \cdots + x + 1)}_{= x^n - 1, \text{ par } P(n)} \\ &= (x-1)x^n + x^n - 1 \\ &= x^{n+1} - x^n + x^n - 1 = x^{n+1} - 1,\end{aligned}$$

et $P(n+1)$ est démontrée.

Solution 2.

(a) On a $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k(k-1)!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)(n-k)!} = \frac{n!\,(n-k+1+k)}{(k-1)!\,(n-k)!\,k\,(n-k+1)} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$.

(b) On procède par récurrence sur n. On a $(x+y)^0 = 1 = \binom{0}{0}x^0y^0$, donc $P(0)$ est vérifiée. Pour $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, on a $(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n \overset{P(n)}{=} (x+y)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k}\right) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1}y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k+1} = \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}x^ky^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k+1}$. On peut alors faire commencer la première somme à l'indice $k = 0$, et terminer la deuxième à l'indice $n+1$ (on ne fait qu'ajouter 0, par définition du coefficient binomial). L'expression devient alors $\sum_{k=0}^{n+1}\left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right)x^ky^{n-k+1} \overset{(a)}{=} \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^ky^{n-k+1}$ et $P(n+1)$ est vérifiée.

Solution 3.

(a) $0 = \frac{0(0+1)}{2}$, donc $P(0)$ est vérifiée. Pour $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, on a $\sum_{k=0}^{n+1} k = n + 1 + \sum_{k=0}^{n} k \overset{P(n)}{=} n + 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2n + 2 + n^2 + n}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, donc $P(n+1)$ est vérifiée.

(b) $0 = \dfrac{0(0+1)(2\cdot 0+1)}{6}$, donc $P(0)$ est vérifiée. Pour $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, on a $\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = (n+1)^2 + \sum_{k=0}^{n} k^2 \overset{P(n)}{=} (n+1)^2 + \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, ce qui donne $\dfrac{(n+1)(6(n+1)+n(2n+1))}{6} = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ et $P(n+1)$ est vérifiée.

(c) $\dfrac{1}{1(1+1)} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{1+1}$, donc $P(1)$ est vérifiée. Pour $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, on a $\sum_{k=1}^{n+1} \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)} \overset{P(n)}{=} \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} + \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1+n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{n+1}{n+2}$, donc $P(n+1)$ est vérifiée.

(d) On applique le 2(b) à $x = y = 1$.

(e) On procède par récurrence forte (on va montrer que $P(n-1)$ et $P(n)$ impliquent $P(n+1)$).
<u>Initialisation:</u> On vérifie $P(0)$ et $P(1)$. On a $\dbinom{0}{0} = 1 = f_1$, donc $P(0)$ est vérifiée, et $\binom{1}{0} + \binom{0}{1} = 1 = f_2$, donc $P(1)$ est vérifiée.
<u>Pas de récurrence:</u> On suppose que $P(n-1)$ et $P(n)$ sont vérifiées, et on montre $P(n+1)$. On a $\sum_{k=0}^{n+1} \dbinom{n+1-k}{k} = \sum_{k=0}^{n+1} \dbinom{n-k}{k} + \sum_{k=0}^{n+1} \dbinom{n-k}{k-1}$, en utilisant le 2(a). Comme le terme $k = n+1$ est nul dans les deux sommes, et le terme $k = 0$ est nul dans la seconde somme, l'expression devient $\sum_{k=0}^{n} \dbinom{n-k}{k} + \sum_{k=1}^{n} \dbinom{n-k}{k-1} = \sum_{k=0}^{n} \dbinom{n-k}{k} + \sum_{k=0}^{n-1} \dbinom{n-1-k}{k} = f_{n+1} + f_n = f_{n+2}$, et $P(n+1)$ est vérifiée.

Solution 4.

(a) $\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{6\pm 2\sqrt{5}}{4} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} + 1$.

(b) On multiplie l'équation de (a) par x^n.

(c) On calcule: $a_{n+1} + a_n = c(\alpha^{n+1} + \alpha^n) + d(\beta^{n+1} + \beta^n) = c\alpha^{n+2} + d\beta^{n+2} = a_{n+2}$.

(d) <u>Init:</u> On vérifie la formule pour f_0 et f_1 (cf cours). <u>Pas de récurrence:</u> Posons $a_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$. On suppose que $f_n = a_n$ et $f_{n+1} = a_{n+1}$, et on veut montrer que $f_{n+2} = a_{n+2}$. Par définition, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, ce qui vaut $a_{n+1} + a_n$ grâce à l'hypothèse de récurrence. Mais comme la suite (a_n) est de la forme de (c) (avec $c = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $d = -\frac{1}{\sqrt{5}}$), on a $a_{n+1} + a_n = a_{n+2}$. D'où $f_{n+2} = a_{n+2}$.

Solution 5.

(a) Par définition, $a_n \longrightarrow a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N$ tq $\forall n \geq N$ on a $|a_n - a| \leq \varepsilon$. Posons $b_n = |a_n - a|$. Alors $|a_n - a| = ||a_n - a| - 0| = |b_n - 0|$. Ainsi: $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ tq $\forall n \geq N$ on a $|b_n - 0| \leq \varepsilon$. Cela se traduit par $b_n \longrightarrow 0$, i.e., $|a_n - a| \longrightarrow 0$.

(b) Comme avant, $a_n \longrightarrow a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N$ tq $\forall n \geq N$ on a $|a_n - a| \leq \varepsilon$. Comme pour des nombres x, y la distance entre x et y est toujours supérieure ou égale à la distance entre $|x|$ et $|y|$, on a $||x| - |y|| \leq |x - y|$ (le démontrer rigoureusement !). Ainsi, $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$, et donc: $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ tq $\forall n \geq N$ on a $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| \leq \varepsilon$. Cela montre: $|a_n| \longrightarrow |a|$.

(c) Pour la suite $a_n = (-1)^n$, on a $|a_n| = 1 \longrightarrow 1$, mais (a_n) ne converge pas.

Solution 6.

(a) Soit $\varepsilon > 0$. On va montrer qu'il existe N tel que pour tout $n \geq N$, on a $|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}| \leq \varepsilon$. On écrit:

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{b_n b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n||b|}.$$

Comme $b_n \longrightarrow b$, on a $|b_n| \longrightarrow |b|$ par l'exercice 5(b) ; il existe donc un N_1 tel que pour tous $n \geq N_1$, on a $||b_n| - |b|| \leq$ ce qu'on veut, disons $\frac{|b|}{2}$. Cela implique $|b_n| \geq \frac{|b|}{2}$, et on a donc

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n||b|} \leq \frac{|b_n - b|}{(|b|/2)|b|} = |b_n - b| \cdot \frac{2}{b^2}.$$

Or $b_n \longrightarrow b$, on peut donc trouver N_2 tel que pour tous $n \geq N_2$, on a $|b_n - b| \leq$ ce qu'on veut, disons $\varepsilon \cdot (b^2/2)$. Ainsi, dès que $n \geq N = \max(N_1, N_2)$, on a

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| \leq |b_n - b| \cdot \frac{2}{b^2} \leq \varepsilon \frac{b^2}{2} \cdot \frac{2}{b^2} = \varepsilon.$$

Donc $\dfrac{1}{b_n} \longrightarrow \dfrac{1}{b}$, i.e., $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{1}{b}$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \dfrac{1}{b_n} = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right) \cdot \left(\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{b_n}\right) = a \cdot \dfrac{1}{b} = \dfrac{a}{b}$, où l'on a utilisé les produits de limites (démontré en cours).

Solution 7.

(a) Strictement décroissante, bornée car convergente (vers 0): c'est une suite géométrique de raison $r = \frac{1}{2} < 1$.

(b) Strictement croissante (montrer que $2(n+1)^2 - \frac{1}{n+1} > 2n^2 - \frac{1}{n}$), non bornée (car $a_n \geq n$ qui n'est pas majorée), donc divergente.

(c) Strictement croissante, bornée car convergente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot 3}{n \cdot (1 + \frac{2}{n})} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3}{\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{2}{n})} = \frac{3}{1} = 3.$$

(d) Pas monotone (ni croissante, ni décroissante), bornée car convergente vers $\frac{5}{3}$ (même idée qu'au (b)).

(e) Strictement croissante, non bornée (car $a_n \geq n$ qui n'est pas majorée), donc divergente.

(f) Pas monotone (ni croissante ni décroissante), bornée car convergente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{3n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(1-\frac{1}{n})}{n^2(3+\frac{1}{n^2})} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n^2}} = 0 \cdot \frac{1}{3} = 0.$$

(g) Strictement croissante, bornée car convergente vers $\frac{1}{3}$ (voir point précédent, mais avec n^2 en haut au lieu de n.)

(h) Pas monotone (ni croissante, ni décroissante), bornée car convergente:

$$\lim_{n\to\infty} |b_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/4}}{n^{1/3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/12}} = 0,$$

où, pour la dernière égalité, on procède similairement que pour montrer que la suite $\frac{1}{n}$ converge vers 0: Si $\varepsilon > 0$, on choisit $N \geq (1/\varepsilon)^{12}$, et donc $|\frac{1}{n^{1/12}} - 0| = \frac{1}{n^{1/12}} \leq \frac{1}{N^{1/12}} \leq \varepsilon$.

(i) Strictement décroissante, bornée car convergente:

$$\begin{aligned} 0 \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

donc $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \longrightarrow 0$ par le théorème des deux gendarmes.

(j) Pas monotone (ni croissante, ni décroissante), bornée car convergente vers 0. On commence par remarquer que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}\frac{(n+1)^2}{n^2}$. La suite $\left(\frac{(n+1)^2}{n^2}\right)$ converge vers 1, et est donc $\leq \frac{3}{2}$ pour n assez grand (disons $n \geq N$). Ainsi $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{3}{4}$ pour $n \geq N$. Par récurrence, on peut alors montrer que $a_n \leq a_N \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$ pour tout $n \geq N$. Cette dernière suite est géométrique ($a = a_N, r = \frac{3}{4}$), et converge donc vers 0. Par le théorème des deux gendarmes, on a $a_n \to 0$.

Solution 8.

(a) Faux. La suite $a_n = (-1)^n$ ne converge pas, mais est bornée.

(b) Vrai. On a $0 \leq |a_n \sin(17n)| \leq |a_n| \longrightarrow 0$, donc $a_n \sin(17n) \longrightarrow 0$ par le théorème des deux gendarmes.

(c) Faux. Si $n_0 = 0$ et a_n est la suite définie par $a_0 = 10^{30} + 1$, et $a_n = 0$ pour $n \geq 1$, alors a_n converge vers 0 mais $|a_0 - 0| > 10^{30}$.

(d) Faux. Pour $a_n = n$ et $b_n = -\frac{n}{3}$, on a $a_n + 3b_n = 0$, une suite convergente (vers 0), mais ni a_n, ni b_n ne convergent.

(e) Faux. Voir point précédent.