

Remarque sur les corrigés

Lire une solution, même partielle, d'un exercice sans avoir essayé *plusieurs heures*¹ de le résoudre est presque totalement inutile. Faire un exercice en ayant la solution sous les yeux est *beaucoup plus facile*, et ne prépare que très mal à un examen (qui se fait sans solutions).

Par conséquent, la lecture du présent corrigé est *déconseillée*, et se fait à vos risques et périls.

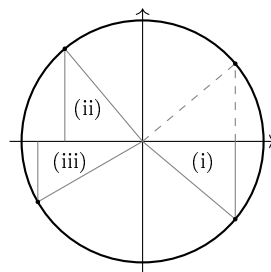
1. (même parfois plusieurs jours)

Solution 1.

- (a) $\operatorname{Re}(z) = 1, \operatorname{Im}(z) = 1, \bar{z} = 1 - i, \arg(z) = \frac{\pi}{4}, \frac{1}{z} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$
- (b) $\operatorname{Re}(z) = 14, \operatorname{Im}(z) = 0, \bar{z} = 14, \arg(z) = 0, \frac{1}{z} = \frac{1}{14}.$
- (c) $\operatorname{Re}(z) = 2, \operatorname{Im}(z) = -2\sqrt{3}, \bar{z} = 2 + 2\sqrt{3}i, \arg(z) = -\frac{\pi}{3}, \frac{1}{z} = \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8}i.$
- (d) $\operatorname{Re}(z) = 0, \operatorname{Im}(z) = -\pi, \bar{z} = \pi i, \arg(z) = -\frac{\pi}{2}, \frac{1}{z} = \frac{1}{\pi}i.$

Solution 2.

- (a) Pour (i), la formule est toujours $\arg(z) = -\arctan(-b/a) = \arctan(b/a)$: On le voit en appliquant une symétrie en l'axe réel du triangle vu en cours. Pour (ii), on observe que, dans le triangle (ii), l'angle en 0 vaut $\varphi = \pi - \arg(z)$, et on calcule (en regardant les côtés) $\tan(\varphi) = \frac{b}{-a}$. Donc $\frac{b}{a} = -\tan(\varphi) = \tan(-\varphi)$, d'où $-\varphi = \arctan(\frac{b}{a})$, et $\arg(z) = \pi - \varphi = \arctan(\frac{b}{a}) + \pi$. Pour (iii), on trouve après un calcul similaire que $\arg(z) = \arctan(\frac{b}{a}) - \pi$. Et pour (iv), $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$ lorsqu'on est au dessus de l'axe réel (i.e., lorsque $b > 0$) et $-\frac{\pi}{2}$ lorsqu'on est au dessous (lorsque $b < 0$).



- (b) Posons $z_1 = a + ib$ et $z_2 = c + id$. Alors $\overline{z_1 + z_2} = \overline{a + c + i(b + d)} = a + c - i(b + d) = a - ib + c - id = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$. De plus, $\overline{z_1 z_2} = \overline{ac - bd + i(ad + bc)} = ac - bd - i(ad + bc)$, et de l'autre côté, $\bar{z}_1 \bar{z}_2 = (a - ib)(c - id) = ac - bd - i(ad + bc)$. Finalement, $z_1/z_2 = (\overline{z_1 z_2})/|z_2| = \bar{z}_1 \bar{z}_2 / |z_2| = \bar{z}_1 z_2 / (z_2 \bar{z}_2) = \bar{z}_1 / \bar{z}_2$.
- (c) Si $z = a + bi$, $e^z = e^a \cos(b) + ie^a \sin(b)$, d'où $\overline{e^z} = e^a \cos(b) - ie^a \sin(b) = e^a \cos(b) + ie^a \sin(-b) = e^{a - bi} = e^{\bar{z}}$.

Solution 3.

- (a) $2 + 2i = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$
- (b) $3i = 3e^{i\frac{\pi}{2}}.$
- (c) $-5 + 5i = 5\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}.$
- (d) $12 - 5i = 13e^{-i\arctan(\frac{5}{12})}.$
- (e) $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}.$
- (f) $i = e^{i\frac{\pi}{2}}.$
- (g) $\frac{\cos(1)}{e^{50}} + i\frac{\sin(1)}{e^{50}} = e^{-50}e^i.$
- (h) $\frac{7}{10} - \frac{9}{10}i = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{10}}e^{-i\arctan(\frac{9}{7})}.$
- (i) $\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{a}{\sqrt{2}}i = ae^{i\frac{\pi}{4}}$, où $a = 2\cos(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$. (Faire un dessin!)

Solution 4.

- (a) Une solution particulière est $z_0 = -1$. Les autres solutions s'obtiennent en multipliant z_0 par les solutions de $z^n = 1$ (cf cours): elles sont donc données par $z \in \{-1 \cdot e^{k2\pi/5} \mid k = 0, \dots, 4\} = \{e^{\pi + k2\pi/5} \mid k = 0, \dots, 4\}.$

- (b) On cherche une solution $z_0 = a + bi$. On a $z_0^2 = a^2 - b^2 + 2abi = 3 - 4i$; et en regardant le module, on trouve $a^2 + b^2 = |z_0|^2 = |z_0^2| = |3 - 4i| = 5$. Les équations sont donc

$$\begin{cases} a^2 - b^2 &= 3 \\ 2ab &= -4 \\ a^2 + b^2 &= 5. \end{cases}$$

La somme de l'équation 1 et 3 donnent: $2a^2 = 8 \Rightarrow a = 2$. De l'équation 2, on tire $b = -1$. Les solutions sont donc: $\pm(2 - i)$.

- (c) Comme $-2i = 2e^{-i\pi/2}$, une solution particulière est $z_0 = \sqrt[4]{2}e^{-i\pi/8}$. Les autres sont obtenues en multipliant par les solutions de $z^4 = 1$: On trouve $z \in \{\sqrt[4]{2}e^{i(-\frac{\pi}{2}+2k\pi)/4} \mid k = 0, \dots, 3\} = \{\sqrt[4]{2}e^{-i\frac{\pi}{8}}, \sqrt[4]{2}e^{i\frac{3\pi}{8}}, \sqrt[4]{2}e^{i\frac{7\pi}{8}}, \sqrt[4]{2}e^{i\frac{11\pi}{8}}\}$.
- (d) Comme $(1 + \sqrt{3}i)^8 = (2e^{i\frac{\pi}{3}})^8 = 2^8 e^{i\frac{8\pi}{3}} = 2^8 e^{i\frac{2\pi}{3}}$, les solutions sont $z_1 = 2^4 e^{i\frac{\pi}{3}}, z_2 = 2^4 e^{i\frac{4\pi}{3}}$.
- (e) En appliquant la formule générale pour les équations de degré 2:

$$z = \frac{1}{2} \left(-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot (12 - 4i)} \right) = \frac{1}{2} \left(-6 \pm \sqrt{-12 + 16i} \right).$$

Ici $\pm\sqrt{-12 + 16i}$ veut dire "les deux solutions de $u^2 = -12 + 16i$ ". On résout donc cette équation; comme au (b), pour $u_0 = a + bi$, les équations sont

$$\begin{cases} a^2 - b^2 &= -12 \\ 2ab &= 16 \\ a^2 + b^2 &= 20. \end{cases}$$

D'où $2a^2 = 8 \Rightarrow a = 2$ et $b = 4$. Donc $u_0 = \pm 2 + 4i$ et les solutions de l'équation originale sont $z = -2 + 2i$ et $z = -4 - 2i$.

- (f) On trouve d'abord les solutions de $u^2 + 4u + 2 = 0$, qui sont données par $u_{\pm} = -2 \pm \sqrt{2}$. On remarque alors que pour trouver des solutions de l'équation originale, il nous suffit de trouver z tel que $z^3 = u_+$ et $z^3 = u_-$. On raisonne alors comme plus haut, pour trouver les 6 solutions $z = -\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{2}} = \sqrt[3]{2 \pm \sqrt{2}}e^{i\pi}, -\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{2}}e^{i\frac{2\pi}{3}} = \sqrt[3]{2 \pm \sqrt{2}}e^{i\frac{5\pi}{3}}, -\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{2}}e^{i\frac{4\pi}{3}} = \sqrt[3]{2 \pm \sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Solution 5.

- (a) Si $P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$, avec $a_i \in \mathbb{R}$, alors $\overline{P(z)} = \overline{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0} = \overline{a_n} \overline{z^n} + \dots + \overline{a_1} \overline{z} + \overline{a_0} = \overline{a_n} \overline{z}^n + \dots + \overline{a_1} \overline{z} + \overline{a_0} = a_n \overline{z}^n + \dots + a_1 \overline{z} + a_0 = P(\overline{z})$, car les $a_i \in \mathbb{R}$ et donc $\overline{a_i} = a_i$. Donc si $P(z_0) = 0$, on a $P(\overline{z_0}) = \overline{P(z_0)} = \overline{0} = 0$, et $\overline{z_0}$ est donc bien une racine de P . Ce n'est pas vrai si les coefficients ne sont pas réels: Si $P(z) = z - i$, alors i est une racine, mais pas $\bar{i} = -i$.
- (b) On a déjà trouvé les racines de ce polynôme au 3(a): $e^{\pm i\frac{\pi}{5}}, e^{\pm i\frac{3\pi}{5}}$ et -1 . La décomposition complexe est donc: $(z + 1)(z - e^{i\frac{\pi}{5}})(z - e^{-i\frac{\pi}{5}})(z - e^{i\frac{3\pi}{5}})(z - e^{-i\frac{3\pi}{5}})$. On trouve la décomposition réelle en groupant deux par deux les facteurs complexes conjugués: $(z - 1)(z^2 - 2\cos(\frac{\pi}{5})z + 1)(z^2 - 2\cos(\frac{3\pi}{5})z + 1) = (z - 1)(z^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}z + 1)(z^2 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}z + 1)$.

- (c) Comme c'est un polynôme à coefficients réels, les racines non-réelles viennent par paires complexes conjuguées. Cela exclut (ii). En développant le membre de droite de l'équation

$$z^4 - 6z^3 + 10z^2 + 2z - 15 = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4),$$

on voit que la somme des racines vaut 6, ce qui exclut (i), et que le produit des racines doit valoir -15 , ce qui exclut (iv). Il ne reste donc que (iii).

Solution 6.

- (a) On écrit $\sin$ et $\cos$ à l'aide des formules avec $e^{\pm ix}$. On trouve alors que le numérateur de $\sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$ est

$$e^{ix}e^{iy} + e^{ix}e^{-iy} - e^{-ix}e^{iy} - e^{-ix}e^{-iy} + e^{ix}e^{iy} - e^{ix}e^{-iy} + e^{-ix}e^{iy} - e^{-ix}e^{-iy}$$

qui se simplifie en

$$2e^{ix}e^{iy} - 2e^{-ix}e^{-iy}.$$

Donc $\sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$ vaut

$$\frac{2e^{ix}e^{iy} - 2e^{-ix}e^{-iy}}{4i} = \frac{e^{i(x+y)} - e^{-i(x+y)}}{2i} = \sin(x + y).$$

- (b) On montre la double inclusion: $\subseteq$ et $\supseteq$. Pour $\supseteq$, observer que si $\operatorname{Im}(z) = 0$, alors $z \in \mathbb{R}$ et donc $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}$, et que $|z| = 1 \Rightarrow z\bar{z} = 1 \Rightarrow \frac{1}{z} = \bar{z}$, d'où $z + \frac{1}{z} = z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}$. Pour $\subseteq$, on pose $z = re^{i\theta}$. La condition devient alors $re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta} \in \mathbb{R}$, ou encore $\operatorname{Im}(re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta}) = 0$. On calcule $\operatorname{Im}(re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta}) = r\sin\theta - \frac{1}{r}\sin\theta = (r - \frac{1}{r})\sin\theta$. La condition s'écrit donc $(r - \frac{1}{r})\sin\theta = 0$. Donc soit $\sin\theta = 0$, d'où $\theta = k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$, soit $r = \frac{1}{r} \Leftrightarrow r^2 = 1 \Leftrightarrow r = 1$ car r est positif. La première condition se traduit par $z = re^{ik\pi} = \pm r \in \mathbb{R}$, d'où $\operatorname{Im}(z) = 0$, et la seconde par $|z| = r = 1$.

Solution 7.

- (a) Faux. Pour $z = 1$, $\arg(z) = 0$ donc $e^{\arg(z)} = 1$ mais $\arg(e^z) = 0$.
 (b) Faux. Pour $z = -1$, $|z| = 1$ donc $e^{|z|} = e$ mais $|e^{-1}| = \frac{1}{e}$.
 (c) Faux. Pour $z = i\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{Re}(z) = 0$, donc $e^{\operatorname{Re}(z)} = 1$, mais $\operatorname{Re}(e^{i\pi/2}) = \operatorname{Re}(i) = 0$.
 (d) Vrai. Pour $z = a + ib$, on a $e^z = e^ae^{ib}$, donc $|e^z| = e^a = e^{\operatorname{Re}(z)}$.

Solution 8.

Par définition, (a_n) est bornée si l'ensemble $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}\}$ est borné. Supposons que l'ensemble A est borné. Alors $\inf A \leq a_n \leq \sup A$, et donc $|a_n| \leq \max\{\sup A, -\inf A\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$. On pose donc $M = \max\{\sup A, -\inf A\}$, et on a bien $|a_n| \leq M$ pour tout n .

De l'autre côté, si $|a_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$, alors M est un majorant de l'ensemble A et $-M$ est un minorant, donc A est borné.

Solution 9.

- (a) Si $|r| \leq 1$, alors $|a_n| = |ar^n| = a|r|^n \leq a$, et la suite est bornée (prendre $M = a$ dans l'exercice précédent), Si $r > 1$, on remarque que, dès que $n \geq 1$,

$$a_n - a_{n-1} = ar^{n-1}(r-1) \geq a \underbrace{(r-1)}_{=e} \Rightarrow a_n \geq a_{n-1} + ae \geq a_{n-2} + 2ae \geq \dots \geq a_0 + nae = a + n(ae).$$

Donc a_n est plus grand que la suite arithmétique $b_n = a + n(ae)$ qui est non bornée (cf cours). Ainsi a_n n'est pas bornée. Finalement, si $r < -1$, on applique le raisonnement précédent à la suite $|a_n| = a|r|^n$. On trouve que $|a_n|$ n'est pas bornée, et donc a_n non plus.

- (b) Si $r \geq 0$, $a_n \geq 0$ et la suite est minorée par 0. Et si $r \in [-1, 0]$, la suite est bornée (cf (a)) donc minorée.
- (c) Si elle est strictement croissante, alors $a_1 > a_0$, d'où $ar > a$ et $r > 1$. Si $r > 1$, on a $ar > a$, d'où $ar^2 > ar, \dots, ar^{n+1} > ar^n$, et donc $a_{n+1} > a_n$, et la suite est strictement croissante.
- (d) Très similaire au cas précédent.
- (e) On a $r = 1 \Rightarrow a_n = ar^n = a = a_0 \Rightarrow$ la suite est constante $\Rightarrow a_1 = a_0 \Rightarrow ar = a \Rightarrow r = 1$. La boucle est bouclée !